



UNIVERSIDAD UTE

CARRERA DE INGENIERÍA MECATRÓNICA

**DISEÑO Y CONSTRUCCION DE PROTOTIPO DE PEZ
ROBÓTICO AUTÓNOMO**

**TRABAJO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO
DE INGENIERO EN MECATRÓNICA**

ANDRES CRUZ GUTIERREZ

DIRECTOR: DANIEL MIDEROS MORA

Quito, diciembre 2018

© Universidad UTE 2018.

Reservados todos los derechos de reproducción

FORMULARIO DE REGISTRO BIBLIOGRÁFICO

PROYECTO DE TITULACIÓN

DATOS DE CONTACTO	
CÉDULA DE IDENTIDAD:	1718818584
APELLIDO Y NOMBRES:	Cruz Gutiérrez Andrés
DIRECCIÓN:	Valle de Carcelén, calle cuarzo E1b
EMAIL:	Macandrew46 hotmail.com
TELÉFONO FIJO:	5006400
TELÉFONO MOVIL:	0987967765

DATOS DE LA OBRA	
TITULO:	Diseño y construcción de un pez robótico
AUTOR O AUTORES:	Cruz Gutiérrez Andrés
FECHA DE ENTREGA DEL PROYECTO DE TITULACIÓN:	29-septiembre-2016
DIRECTOR DEL PROYECTO DE TITULACIÓN:	Ing. Daniel Mideros
PROGRAMA	PREGRADO <input checked="" type="checkbox"/> POSGRADO <input type="checkbox"/>
TITULO POR EL QUE OPTA:	Ingeniero mecatrónico
RESUMEN: Mínimo 250 palabras	<p>El presente proyecto de titulación corresponde al diseño y desarrollo de un prototipo de pez robótico, este estudio ayudará a los diseñadores de robots a entender mejor el movimiento de peces. El proyecto comenzó con el estudio de la locomoción de las truchas, patrones cíclicos y la fuerza de propulsión que presenta la aleta trasera para el desplazamiento.</p> <p>El desarrollo del prototipo se apego en lo mas posible a los datos reales de truchas del mismo peso y tamaño, así como el entorno en el que se podría aplicar.</p> <p>La metodología que rigió el diseño en este proyecto es la de Devdas Sheety la cual se divide en 3 procesos. Durante todo el diseño quedo claro la sinergia de la parte mecánica, electrónica y de control del proyecto.</p> <p>Analizando las necesidades y especificaciones del sistema permitió realizar el modelado y simulación lo cual desarrollo el modelo conceptual del prototipo es decir el correcto dimensionamiento de este.</p> <p>Un reto al desarrollar este prototipo fue que su movimiento, es decir, los patrones cíclicos y propulsión sean totalmente funcionales y a la vez que se apeguen al de una trucha real.</p> <p>El modelo matemático cumplió una parte fundamental durante el diseño transversal, el</p>

PALABRAS CLAVES:

diseño mecánico comenzó con el estudio cinemático y dinámico del sistema de la aleta o cola.

La sinergia del desarrollo mecatrónico permitió que las diferentes partes del proyecto se diseñen y se adapten a sí mismas de una forma eficaz y practica sobre todo por la parte del tiempo, consumo energético y aprovechamiento de recursos.

Patrones cíclicos: Movimiento ondulatorio en base a momentos o reacciones predecibles

Arduino: Placa de programación la cual utiliza lenguaje c

Esfuerzo: Fuerza desarrollada o puesta sobre un área determinada

Diseño transversal: Tipo de diseño en el cual se mantiene las tres áreas: mecánica, electrónica y control de la mano

Modelo Matemático: tipo de formulismo matemático para expresar relaciones, proposiciones sustantivas de hechos, variables, parámetros, entidades y relaciones entre variables u operaciones

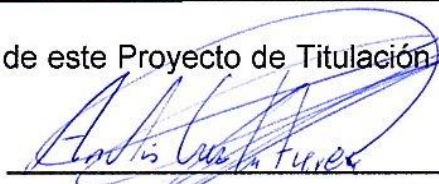
ABSTRACT:

This qualification project corresponds to the design and development of a robotic fish prototype, this study will help the robot designers to better understand the movement of fish. The project began with the study of the locomotion of trout, cyclic patterns and the propulsion force that presents the rear fin for displacement. The development of the prototype is attached as much as possible to the actual data of trout of the same weight and size, as well as the environment in which it could be applied. The methodology that governed the design in this project is that of Devdas sheety which is divided into 3 processes. Throughout the design it was clear the synergy of the mechanical, electronic and control part of the project. Analyzing the needs and specifications of the system allowed to perform modeling and simulation which developed the conceptual model of the prototype is to say the correct sizing of this.

A challenge in developing this prototype was that its movement, that is, the cyclical patterns and propulsion are fully functional and at the same time it is adhere to that of a real trout. The mathematical model fulfilled a fundamental part during the transversal design, the mechanical design began with the kinematic and dynamic study of the fin or tail system. The synergy of

	<p>the Mechatronic development allowed the different parts of the project to be designed and adapted to themselves in an effective way and practise especially by the part of the time, energy consumption and use of resources</p>
<p>KEYWORDS</p>	<p>cyclical patterns: Wave motion based on time or predictable reactions Arduino board which uses programming language c Effort: Force developed or put on a specific area cross design: type design in which the three mechanics, electronics and control areas of the hand is held Mathematical model type of mathematical formalism to express relationships, substantive propositions of facts, variables, parameters, entities and relationships between variables or operations</p>

Se autoriza la publicación de este Proyecto de Titulación en el Repositorio Digital de la Institución.



ANDRES CRUZ GUTIERREZ

C.I. 1718818584

DECLARACIÓN Y AUTORIZACIÓN

Yo, **Cruz Gutiérrez Andrés**, CI 1718818584 autor/a del proyecto titulado: **Diseño y construcción de prototipo de pez robótico autónomo** previo a la obtención del título de **Ingeniero en Mecatrónica** en la Universidad UTE.

1. Declaro tener pleno conocimiento de la obligación que tienen las Instituciones de Educación Superior, de conformidad con el Artículo 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior, de entregar a la SENESCYT en formato digital una copia del referido trabajo de graduación para que sea integrado al Sistema Nacional de información de la Educación Superior del Ecuador para su difusión pública respetando los derechos de autor.
2. Autorizo a la BIBLIOTECA de la Universidad UTE a tener una copia del referido trabajo de graduación con el propósito de generar un Repositorio que democratice la información, respetando las políticas de propiedad intelectual vigentes.

Quito, 2 del 12 del 2018.



ANDRÉS CRUZ GUTIERREZ

C.I. 1718818584

DECLARACIÓN

Yo **ANDRES CRUZ GUTIERREZ**, declaro que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

La Universidad UTE puede hacer uso de los derechos correspondientes a este trabajo, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normativa institucional vigente.



ANDRES CRUZ GUTIERREZ

C.I. 1718818584

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo que lleva por título "**Diseño y construcción de prototipo de pez robótico autónomo**", que, para aspirar al título de **Ingeniero en Mecatrónica** fue desarrollado por **Andrés Cruz**, bajo mi dirección y supervisión, en la **Facultad de Ciencias de la Ingeniería**; y cumple con las condiciones requeridas por el reglamento de Trabajos de Titulación artículos 19, 27 y 28.



Ing. Daniel Mideros

DIRECTOR DEL TRABAJO

C.I. 1713177325

DEDICATORIA

Dedicado a todas esas personas que al querer conseguir una meta saben que no
será fácil,

Saben que deben sacrificarse, noches sin dormir, angustias, problemas,
pero aun así saben que cualquier sueño es realizable, cualquier sacrificio es
recompensable.

Aquella gente que no se conforma y siempre busca sus oportunidades
Crea su propia suerte.

AGRADECIMIENTO

A mi padre ya que con su infinito cariño siempre me ha ayudado y más aún en este objetivo, gracias por tantos sacrificios.

A mi madre gracias por no rendirse y por sus innumerables muestras de cariño y amor las cuales han sido un motor para seguir adelante

A mi hermano que sin duda siempre me ha estado apoyando por más difícil que sea el problema.

A la Universidad UTE, porque en sus aulas, recibimos el conocimiento intelectual y humano de cada uno de los docentes. Especial agradecimiento a mi Director de Tesis el Dr. Daniel Mideros por sus consejos y amistad.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

	PÁGINA
RESUMEN	VI
ABSTRACT	VII
1. INTRODUCCIÓN	1
2. MARCO TEÓRICO	3
2.1. BIOMECÁNICA	4
2.2. BIOMECÁNICA DEL PEZ.....	4
2.3. PECES	5
2.3.1. TRUCHA.....	5
2.3.1.1. CARACTERÍSTICAS.....	5
2.3.1.2. ESQUELETO.....	6
2.3.1.3. ESQUELETO TRONCO	6
2.3.1.4. COLA.....	6
2.3.1.5. ANATOMÍA.....	7
2.3.1.6. LOCOMOCIÓN.....	7
2.3.1.7. PATRON CÍCLICO DE NADO.....	7
2.3.1.8. GENERACIÓN DE LA PROPULSIÓN.....	8
2.4. MODELADO MECÁNICO DEL MOVIMIENTO	8
2.4.1. ROBOTUNA.....	8
2.4.2. PPF-04.....	9
2.5. MECANISMOS ALTERNOS PARA EL MOVIMIENTO DE ALETA.....	10
2.5.1. MECANISMO DE CUATRO BARRAS	10
2.5.2 MECANISMO DIFERENCIAL	10
3. METODOLOGÍA Y MATERIALES	11
3.1. METODOLOGÍA MECATRÓNICA.....	12
3.2. ANÁLISIS DE REQUERIMIENTOS DEL SISTEMA.....	12
3.3. DISEÑO PARALELO DEL SISTEMA.....	13
3.3.1 MODELADO MATEMÁTICO	13
3.3.2 DISEÑO MECÁNICO	14
3.3.3 DISEÑO ELECTRÓNICO.....	15
3.3.4 DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL	15
3.4. PRUEBAS	16
3.5. MATERIALES.....	16
3.5.1 ARDUINO MICRO.....	16
3.5.2 SERVO MOTOR SG90	17
3.5.3 SENSOR ULTRASÓNICO HC-SR04.....	18
4. DISEÑO	19
4.1 DISEÑO MECÁNICO.....	20
4.1.1. MODELO DINÁMICO	20
4.1.2 MODELO CINEMÁTICO	25
4.1.3 ESFUERZOS	27
4.1.3.1 FUERZA DE EMPUJE.....	27

4.1.3.3 SECCIÓN TRANSVERSAL	28
4.1.4 MODELO CAD	30
4.1.5 SELECCIÓN DE MATERIALES	32
4.2 DISEÑO ELECTRÓNICO	33
4.2.1 SELECCIÓN DE ACTUADORES	33
4.2.2 CÁLCULO DE CONSUMO DE CORRIENTE	33
4.2.3 SELECCIÓN DE SENSORES	35
4.2.4 SELECCIÓN DE FUENTE DE ENERGIA	35
4.2.5 DISEÑO INTERFAZ	36
5. ANALISIS DE RESULTADOS	37
5.1. IMPLEMENTACIÓN DEL SISTEMA	38
5.2. PRUEBAS DE VALIDACIÓN	38
5.3 MOVIMIENTO	39
6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	42
CONCLUSIONES	43
RECOMENDACIONES	43

ÍNDICE DE TABLAS

	PÁGINA
Tabla 1. Características arduino micro.....	17
Tabla 2. Características servomotor SG90	18
Tabla 3. Características sensor ultrasónico hc-sr04	18
Tabla 4. Datos del sistema.....	25
Tabla 5. Datos de fuerza hidrostática.....	28
Tabla 6. Datos técnicos del material abs.	33
Tabla 7. Datos técnicos servo motor SG90.....	33
Tabla 8. Características servomotor SG90	34
Tabla 9. Datos técnicos batería.....	35
Tabla 10. Medición del sensor	38

ÍNDICE DE FIGURAS

	PÁGINA.
Figura 1. Características externas de la trucha.	5
Figura 2. Los huesos que componen el esqueleto.	6
Figura 3. Vista de la aleta caudal y anal	6
Figura 4. Estructura esquelética de un pez.....	7
Figura 5. Tipos de propulsión bcf.....	8
Figura 6. Fuerza de propulsión	8
Figura 7. Prototipo de robotuna	9
Figura 8. Prototipo de ppf-04	9
Figura 9. Modelo del mecanismo de cuatro barras.	10
Figura 10. Modelo del mecanismo diferencial.....	10
Figura 11. Proceso de diseño mecatrónica.....	12
Figura 12. Desarrollo del diseño en paralelo.	13
Figura 13. Proceso del diseño mecánico.....	14
Figura 14. Proceso del diseño electrónico.....	15
Figura 15. Proceso del diseño del sistema de control.	16
Figura 16. Asignación de pines arduino micro	17
Figura 17. Diagrama del cuerpo libre del sistema.....	20
Figura 18. Sistema de coordenadas	25
Figura 19. Representación de la fuerza hidrostática.....	27
Figura 20. Diagrama de momentos cortante y flector (cola).	29
Figura 21. Dimensiones geométricas	30
Figura 22. Servo bracket tipo c.	31
Figura 23. Servo bracket tipo u.....	31
Figura 24. Aleta del prototipo.....	31
Figura 25. Cabeza del prototipo.....	32
Figura 26. Ensamblaje final del prototipo.....	32
Figura 27. Sensor ultrasónico hc-sr04	35
Figura 28. Esquematación de la conexión.	36
Figura 29. Placa de conexión	36
Figura 30. Movimiento cíclico del pez.....	39
Figura 31. Movimiento oscilatorio	40

Figura 32. Curvatura en L del prototipo	41
Figura 33. Movimiento oscilatorio en L del prototipo.....	41
Figura 34. Curvatura en U del prototipo.....	41
Figura 35. Movimiento oscilatorio en U del prototipo	41

_Toc477520621

RESUMEN

El presente proyecto de titulación corresponde al diseño y desarrollo de un prototipo de pez robótico, este estudio ayudará a los diseñadores de robots a entender mejor el movimiento de peces. El proyecto comenzó con el estudio de la locomoción de las truchas, patrones cíclicos y la fuerza de propulsión que presenta la aleta trasera para el desplazamiento. El desarrollo del prototipo se apegó en lo más posible a los datos reales de truchas del mismo peso y tamaño, así como el entorno en el que se podría aplicar. La metodología que rigió el diseño en este proyecto es la de Devdas Sheety la cual se divide en 3 procesos. Durante todo el diseño quedo claro la sinergia de la parte mecánica, electrónica y de control del proyecto. Analizando las necesidades y especificaciones del sistema permitió realizar el modelado y simulación lo cual desarrollo el modelo conceptual del prototipo es decir el correcto dimensionamiento de este. Un reto al desarrollar este prototipo fue que su movimiento, es decir, los patrones cíclicos y propulsión sean totalmente funcionales y a la vez que se apeguen al de una trucha real. El modelo matemático cumplió una parte fundamental durante el diseño transversal, el diseño mecánico comenzó con el estudio cinemático y dinámico del sistema de la aleta o cola. La sinergia del desarrollo mecatrónico permitió que las diferentes partes del proyecto se diseñen y se adapten a sí mismas de una forma eficaz y practica sobre todo por la parte del tiempo, consumo energético y aprovechamiento de recursos.

Palabras clave: Patrones cíclicos, Arduino, Esfuerzo, Diseño transversal, Modelo Matemático

ABSTRACT

This qualification project corresponds to the design and development of a robotic fish prototype, this study will help the robot designers to better understand the movement of fish. The project began with the study of the locomotion of trout, cyclic patterns and the propulsion force that presents the rear fin for displacement. The development of the prototype is attached as much as possible to the actual data of trout of the same weight and size, as well as the environment in which it could be applied. The methodology that governed the design in this project is that of Devdas sheety which is divided into 3 processes. Throughout the design it was clear the synergy of the mechanical, electronic and control part of the project. Analyzing the needs and specifications of the system allowed to perform modeling and simulation which developed the conceptual model of the prototype is to say the correct sizing of this. A challenge in developing this prototype was that its movement, that is, the cyclical patterns and propulsion are fully functional and at the same time it is adhere to that of a real trout. The mathematical model fulfilled a fundamental part during the transversal design, the mechanical design began with the kinematic and dynamic study of the fin or tail system. The synergy of the Mechatronic development allowed the different parts of the project to be designed and adapted to themselves in an effective way and practise especially by the part of the time, energy consumption and use of resources

1. INTRODUCCIÓN

Por mucho tiempo la humanidad creía que el progreso de la robótica llegaría a ser como se presentaba en las películas, y aunque en los últimos años se ha orientado a otras áreas sin duda alguna la creciente tecnología permite el uso de la robótica para facilitar tareas inclusive cotidianas como por ejemplo en la industria, el transporte, la medicina, esta última con un progreso sorprendente con el robot quirúrgico Da Vinci el cual permite realizar varios procedimientos quirúrgicos con un enfoque mínimamente invasivo.

El progreso de la robótica ha ayudado en el desarrollo de diferentes sistemas de locomoción dependiendo del ambiente designado para el robot como por ejemplo agua, aire y tierra en general, estos sistemas han sido tan eficaces que han ayudado al ser humano, el mayor problema es la carencia de versatilidad o adaptabilidad de los robots a moverse en ambientes diferentes. El objetivo de investigar y diseñar robots capaces de moverse en diferentes áreas es aprovechar el medio ambiente y la ampliación de sus funcionalidades, estas dos facetas serian mayormente aplicadas si la adaptabilidad del robot permitiera el funcionamiento eficaz del robot, lamentablemente cualquier máquina, en este caso, robot no trabaja con el nivel de eficiencia esperado.

Este proyecto está compuesto por algunos sistemas de la mecatrónica, se desarrolló para la investigación y diseño de un sistema de locomoción probado teóricamente y físicamente. La robótica se ha visto influenciada por el estudio de los seres vivos, es decir, de la biomecánica, sus modelos, estructuras, procesos y leyes, permitiendo realizar un prototipo de pez robótico autónomo capaz de trasladarse en su ambiente. El objetivo de esta tesis es diseñar y construir un prototipo capaz de imitar el movimiento de un pez, para cumplir este objetivo se debe lograr los siguientes objetivos específicos:

- Diseñar el mecanismo de propulsión del pez.
- Implementar el mecanismo de propulsión en el prototipo.
- Diseñar la parte electrónica y de control del pez.

2. MARCO TEÓRICO

2.1. BIOMECÁNICA

Rama de la bioingeniería que estudia los modelos, estructuras, procesos, fenómenos y leyes que sean relevantes en el movimiento de un ser vivo utilizando conceptos de ingeniería, principalmente bioingeniería e Ingeniería Mecánica (C. Ross Ethier, 2014). La mecánica es una rama de la física que se interesa en la descripción del movimiento y la deformación de los cuerpos y como estos reaccionan ante perturbaciones mecánicas llamadas fuerzas, la mecánica es dividida en varias áreas, pero las tres más relevantes para la biomecánica son: cuerpo-rígido, cuerpo-deformable y fluidos. La principal área de estudio y aplicación de la biomecánica es la locomoción (caminar, correr, saltar) donde los músculos generan fuerzas que son transferidas al suelo por huesos y los tejidos.

Para ello son necesarios los modelos biomecánicos los cuales permiten realizar predicciones sobre el comportamiento, resistencia, fatiga y otros aspectos de diferentes segmentos corporales cuando están sometidos a unas condiciones determinadas facilitando el entendimiento básico del sistema. (Huston, 2015).

2.2. BIOMECÁNICA DEL PEZ

La biomecánica de un pez radica en el desarrollo de la propulsión, la fuerza que necesita el pez para poder romper la viscosidad del líquido en el que se encuentre y poderse mover.

Para hablar de la propulsión del pez, de su biomecánica, se debe examinar que le permite desarrollarla, sus músculos:

Rojos: Formados por fibras cuya velocidad de contracción es lenta y cuya producción de energía está basada en oxidativos aeróbicos, este sistema permite el nado rutinario (Gutierrez, 2015).

Blancos: Formados por fibras de contracción rápida y basados en procesos glicolíticos anaeróbicos, forma un sistema de alta potencia, pero de capacidad limitada (Gutierrez, 2015).

Rosas: Son el punto intermedio entre los rojos y blancos (Gutierrez, 2015).

La potencia máxima se obtiene cuando la velocidad de contracción muscular es un 17-36% de la máxima en el caso de los músculos rojos y cuando es menor del 38% en el caso de los blancos.

El sistema de propulsión de una trucha se basa en AC es decir utiliza las aletas corporales y caudales (cola) para su empuje, además realiza movimientos ondulatorios, esto le permite realizar cambios de velocidad y movimientos bruscos, pero en realidad sirve para realizar un tipo de nado no estacionario donde se utiliza más los músculos blancos.

2.3. PECES

El término pez proviene de la palabra “piscis” y se refiere a la manera de trasladarse de un animal en el agua impulsándose con su cola.

Son animales vertebrados acuáticos recubiertos de escamas, dotados de dos conjuntos de aletas emparejadas y de varias aletas individuales.

Según la taxonomía tradicional realizada por BioEnciclopedia (2015), los peces incluyen tres superclases:

- **Agnatos:** Peces desprovistos de mandíbula.
- **Condriictios:** Peces cartilaginosos.
- **Osteictios:** Peces cuyo esqueleto es óseo.

2.3.1. TRUCHA

Trucha viene del griego derivado al latín tructa, son peces de la subfamilia salmoninae o salmónidos que se refiere a peces que habitan en agua dulce (Simbaña, 2014).

2.3.1.1. CARACTERÍSTICAS

La identificación de las truchas se da mediante sus aletas y el color de sus escamas, además de sus diferencias morfológicas en diferentes poblaciones aisladas o adaptadas por el medio en donde se encuentran (Simbaña, 2014) (Herrera, 2013).

En la figura 1 vemos la distribución o regiones del pez desde la cabeza, el tronco y la cola.

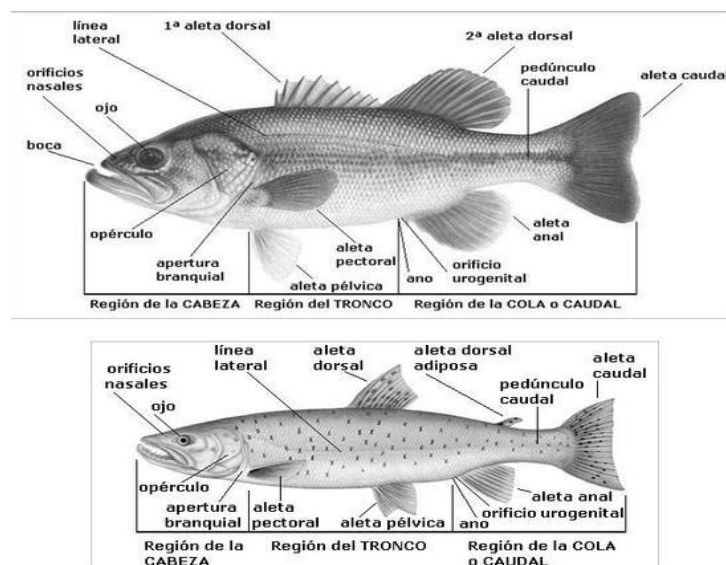


Figura 1. Características externas de la trucha.
(Duran, 2015)

Es de suma importancia saber la estructura morfológica del pez, de esa manera se entenderá su hidrodinámica y su capacidad para flotar.

2.3.1.2. ESQUELETO

De acuerdo con Agassiz (1850), " El esqueleto responde al tipo endoesqueleto o de tipo axial, formado por una serie de piezas espinosas englobadas en el cuerpo y una serie de radios que sostienen las aletas, los radios pueden ser blandos o espinosos" En la figura 2 se muestra la composición esquelética del pez y la forma axial de este.

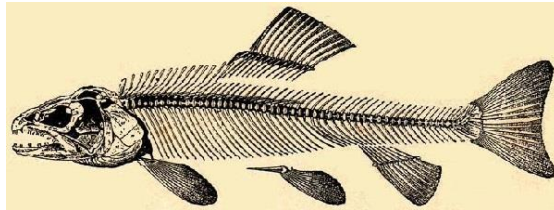


Figura 2. Los huesos que componen el esqueleto.
(Agassiz, 2013)

El esqueleto del pez permite entender la disposición de sus aletas y cómo interactúan estas a nivel esquelético y muscular.

2.3.1.3. ESQUELETO TRONCO

Incluye las aletas responsables del movimiento y la estabilización del pez en el agua. Un grupo de aletas pares, las pectorales (torácicas) y las pélvicas (ventrales) (correspondientes a nuestros brazos y piernas), y otro de aletas impares, la dorsal, la anal y la caudal. El soporte de las aletas son los radios que pueden ser rígidos, en cuyo caso se llaman espinas, o blandos (Herrera, 2013).

2.3.1.4. COLA

La cola corresponde al extremo posterior del cuerpo, incluye el pedúnculo caudal. La aleta anal y caudal, en el caso de la trucha la forma de la aleta caudal es homocerca (Herrera, 2013).

Como se ha explicado la cola es muy importante para generar el movimiento del pez es por ello que en la figura 3 se muestra la forma de la cola, su diseño hidrodinámico.

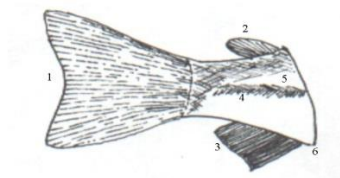


Figura 3. Vista de la aleta caudal y anal
(Duran, 2015)

En el pez la parte más importante para su movimiento es la cola ya que incluso un pez puede ahogarse si no se mantiene en movimiento.

2.3.1.5. ANATOMÍA

La anatomía del pez es diferente de los mamíferos porque carece del sistema tendinoso o tejido conectivo que conecta el paquete muscular al esqueleto (Simbaña, 2014).

En la figura 4 se muestra la estructura del pez como tabiques conectados mediante un tejido al esqueleto del pez.

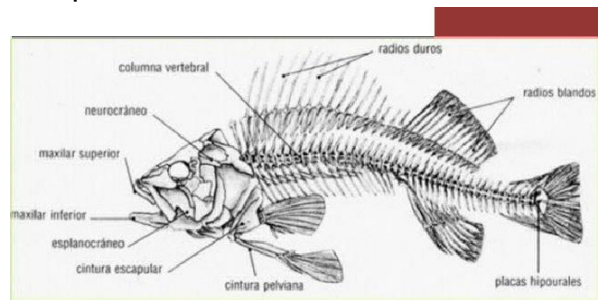


Figura 4. Estructura esquelética de un pez (Duran, 2015)

Los peces tienen células musculares que van en paralelo separadas perpendicularmente por tabiques del tejido conectivo, unidas al esqueleto y la piel, los segmentos musculares situados entre estos tabiques se llaman miotomas (Herrera, 2013).

2.3.1.6. LOCOMOCIÓN

La trucha es un pez muy activo, es decir siempre está en movimiento mientras realiza otra tarea. Este pez nada con el empuje obtenido por su cola aprovechando la inclinación del cuerpo por la contracción alterna de los músculos de ambos lados (Noriega, 2013).

Básicamente la trucha se mueve gracias al empuje de su cola manteniendo la estabilidad con sus aletas dorsales a la vez de lograr la inclinación adecuada para realizar la contracción de sus músculos para su movimiento.

2.3.1.7. PATRON CÍCLICO DE NADO

De acuerdo con Breder (1926), "Se utiliza una clasificación en la cual relaciona los tipos de propulsor con la cinemática, comportamiento locomotor y fibras musculares empleadas."

Casi todos los peces arquean su cuerpo, imitando una onda que se expande hasta su aleta caudal, este tipo de desplazamiento se le conoce como locomoción (BCF) (García, 2015).

Tal como se muestra en la figura 5 la onda de propulsión va en dirección opuesta a la del desplazamiento del pez además el movimiento ondulatorio termina en oscilatorio

dependiendo del tipo de movimiento, la onda debe ser mayor que la velocidad de desplazamiento del pez (Garcia, 2015).

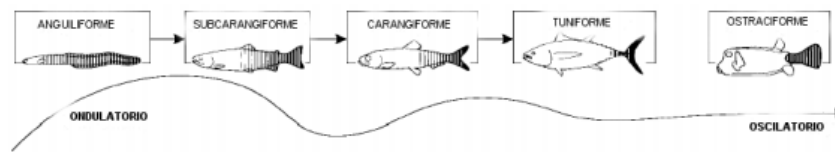


Figura 5. Tipos de propulsión BCF
(Lindsay 1978)

Tipo Subcarangiforme: Este tipo de desplazamiento es el generado por una trucha y se caracteriza porque la amplitud de onda se incrementa en la mitad posterior del pez (Garcia, 2015).

2.3.1.8. GENERACIÓN DE LA PROPULSIÓN

Como vemos en la figura 6 cada forma de impulso tiene su fuerza vectorial cuando se genera solo con la cola y cuando se genera con todo el cuerpo.

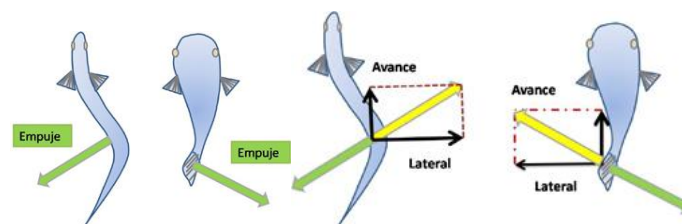


Figura 6. Fuerza de propulsión
(Pastor 2000)

Básicamente la propulsión de un pez se basa en una ley física, la de acción y reacción, el pez contrae un lado de su cuerpo para producir la fuerza de empuje esta fuerza produce una reacción en el lado opuesto que es la resultante de dos fuerzas vectoriales (Carlos, 2014).

2.4. MODELADO MECÁNICO DEL MOVIMIENTO

“Descripción de los fenómenos asociados con el movimiento de los cuerpos, en los sistemas mecánicos se tendrá habitualmente como variables descriptivas las posiciones, velocidades, y aceleraciones con sus relaciones constitutivas básicas” (Victor, 2013).

2.4.1. ROBOTUNA

En 1994 en el MIT se desarrolló el proyecto RoboTuna con el objetivo de obtener un sistema de propulsión más eficiente para vehículos submarinos autónomos.

El robot se construyó sobre la base de un esqueleto formado por nueve vértebras (de madera el primer prototipo, metálicas el segundo) articuladas entre sí mediante poleas y recubierto de una piel elaborada con una capa fina de espuma recubierta de lycra.

En la figura 7 se muestra el diseño mecánico del prototipo compuesto por eslabones y un recubrimiento de un resorte resistente.

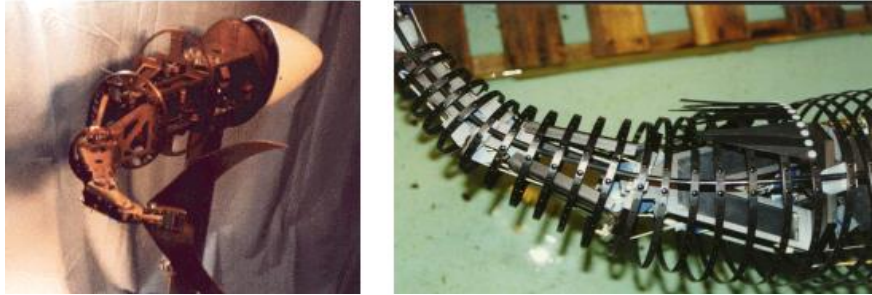


Figura 7. Prototipo de RoboTuna
(Garcia, 2015)

RoboTuna no fue capaz de replicar las ráfagas de aceleración que el pez atún real eran capaces de manejar. Los investigadores formularon un algoritmo genético sin conseguir grandes mejoras.

2.4.2. PPF-04

En la figura 8 se muestra el prototipo de pez PPF-04 último en su generación, su innovación se orienta más a la parte electrónica y de control del pez.



Figura 8. Prototipo de PPF-04
(Garcia, 2015)

Este prototipo mide 19 cm y pesa 400 g, con un movimiento cangariforme y teledirigido, el estudio realizado en este pez permitió desarrollar una relación entre la velocidad del robot y la amplitud de las oscilaciones de su aleta caudal.

2.5. MECANISMOS ALTERNOS PARA EL MOVIMIENTO DE ALETA.

2.5.1. MECANISMO DE CUATRO BARRAS

El mecanismo de cuatro barras tiene dos grados de libertad y consta de cuatro miembros representados por cuatro barras controladas por dos motores enlazados, que se encuentran en el interior de las partes fijas.

En la figura 9 vemos como se generaría el movimiento ondulatorio para la cola y cada uno de los eslabones del prototipo del pez.

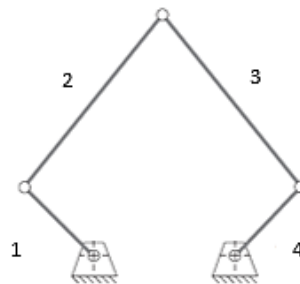


Figura 9. Modelo del mecanismo de cuatro barras.
(Davinia Font, M. T, 2011)

En los enlaces M1, M2 y M3 se colocan actuadores para producir una trayectoria, simulando la ondulación de la trucha (Davinia Font, 2013).

2.5.2 MECANISMO DIFERENCIAL

Es un mecanismo compacto con dos grados de libertad similar al que se utiliza actualmente para el movimiento de la pierna en robots que caminan, también utilizable en el movimiento de dos eslabones del cuerpo del pez. En la figura 10 vemos como se generaría el movimiento ondulatorio para la cola y cada uno de los eslabones del prototipo del pez.

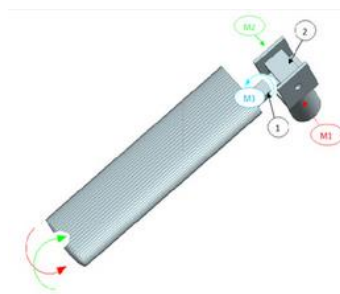


Figura 10. Modelo del mecanismo diferencial.
(Davinia Font, M. T, 2011)

En este mecanismo dos motores colocados en M1 y M2 alimenta dos engranajes, que transmiten el movimiento a un tercer engranaje situado en un eje vertical.

3. METODOLOGÍA Y MATERIALES

3.1. METODOLOGÍA MECATRÓNICA

La metodología es una colección de prácticas, procedimientos y reglas utilizadas para el desarrollo de una determinada rama de conocimiento o disciplina. Los sistemas mecatrónicos son multidisciplinares, incorporan cuatro disciplinas tecnológicas fundamentales: ciencias de la computación y tecnología de la informática, ingeniería eléctrica, y la ingeniería mecánica.

La metodología propuesta por la Ingenieure Verein Deutscher (Asociación de Ingenieros Alemanes) es también una metodología en paralelo que soluciona la evaluación final de la integración del sistema a fin de corregir errores antes de terminar el producto como lo indica la figura 11. Por esta razón el presente trabajo de titulación se realizó utilizando dicha metodología.

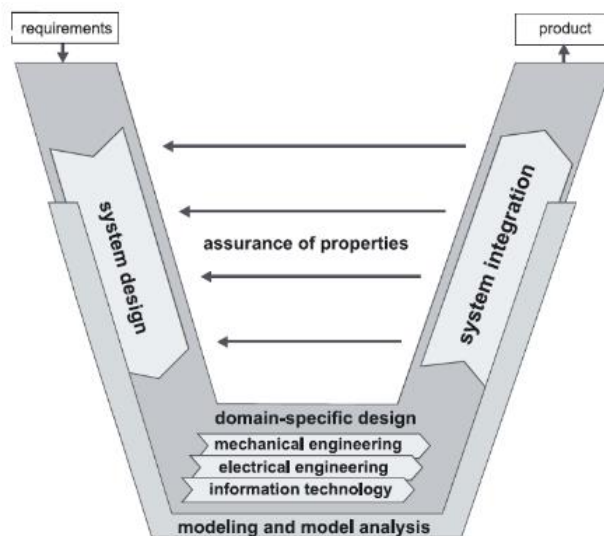


Figura 11. Metodología para diseño mecatrónica en V.
(Deutscher, 2013)

Utilizando esta metodología lo primero que se debe hacer es definir los requerimientos del proyecto, desde las características físicas hasta las funciones del sistema.

En el diseño del sistema se procede a dar posibles soluciones al problema o se busca como cumplir con todos los requerimientos del proyecto, es decir se definen concretamente las características y las funciones que solucionen el problema, esto se hace para poder evaluar los resultados y verificar si existen errores, a fin de corregirlos.

Posterior a esto se procede al diseño específico de cada disciplina de la ingeniería independientemente una de la otra, como son en este caso: diseño mecánico, diseño electrónico, Diseño de control. Cabe recalcar que cada una de estas ingenierías cuenta con sus respectivos diseños y cálculos detallados que ayuden a cumplir su función.

3.2. ANÁLISIS DE REQUERIMIENTOS DEL SISTEMA

Para el diseño del prototipo mecatronico los requerimientos se llevan a cabo mediante un análisis de las características mecánicas, eléctricas e informáticas que el sistema debe cumplir.

Entre las características principales se puede nombrar:

- Modelo: el modelo del robot se eligió a partir de cuatro diseños de mecanismos de la cola.
- Dimensiones del prototipo y la cola.
- Implementar los sistemas de la cola con cuatro grados de libertad.
- Peso del prototipo y cola.
- Materiales para la fabricación de la cola.
- La fuerza de empuje necesaria para producir la locomoción con la cola.
- Los actuadores apropiados para ejercer fuerza de empuje.
- El controlador para el funcionamiento coordinado del sistema de la cola.

3.3. DISEÑO PARALELO DEL SISTEMA

Para el diseño mecatrónico se debe tener en cuenta el diseño en paralelo de sistemas el cual consiste en realizar los cuatro elementos: el modelo matemático, sistema de control, mecánico, electrónico, en los cuales se indica con gran detalle la forma en la que el prototipo cumplirá los requerimientos y especificaciones mencionadas en el análisis de requerimientos del sistema.

Tal como se muestra en la figura 12 el prototipo final es el resultado del diseño en paralelo del cumplimiento de los requerimientos de cada sistema.

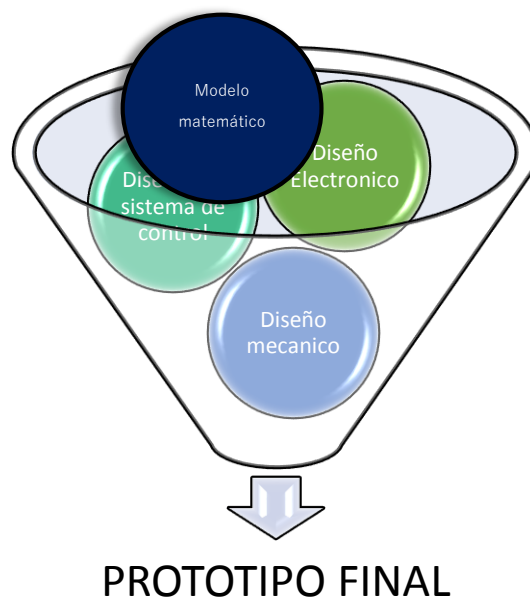


Figura 12. Desarrollo del diseño en paralelo.
(Deutshcher, 2013)

3.3.1 MODELADO MATEMÁTICO

Es un tipo de expresión matemática para relaciones, proposiciones sustantivas de hechos, variables, parámetros, entidades y relaciones entre variables u operaciones. En este caso para estudiar el comportamiento físico de la aleta y cola de una trucha, tomando en cuenta variables como dimensiones, parámetros físicos de una trucha, etc. En la construcción de modelos matemáticos se debe seguir fases determinadas:

- 1) **Identificación:** del problema que necesita ser simulada, optimizada y controlada y por lo tanto requeriría un modelo matemático predictivo.
- 2) **Elección del tipo:** de modelo, esto requiere precisar qué tipo de respuesta u output pretende obtenerse, cuáles son las entradas y factores relevantes, esta elección debe ser simple para permitir un tratamiento matemático asequible con los recursos disponibles.
- 3) **Formalización:** del modelo donde se detallará que forma tienen los datos de entrada, que tipo de herramienta matemática se usara, y como se adaptan a la información previa existente.
- 4) **Comparación de resultados:** los resultados obtenidos necesitan ser comparados con los hechos observados para determinar si el modelo está correcto (Rios, 2016).

3.3.2 DISEÑO MECÁNICO

En la etapa del diseño mecánico para que el prototipo mecatrónico cumpla con los requerimientos y especificaciones es importante el diseño y construcción de la aleta y el cuerpo para eso se procedió:

- En el análisis de requerimientos del subsistema mecánico se estudió las especificaciones necesarias que debe cumplir la aleta y el cuerpo.
- Análisis dinámico realizado mediante LaGrange en el cual se obtuvo las ecuaciones que rigen el sistema.
- Análisis cinemático de un subsistema aleta para obtener el modelo matemático de la posición, velocidad, aceleración.
- Cálculo de las dimensiones del subsistema aleta y del cuerpo.
- Diseño de prototipo virtual en el software SOLIDWORKS 2014.
- Elección de materiales para la construcción de aletas y cuerpo.
- Construcción del prototipo físico.

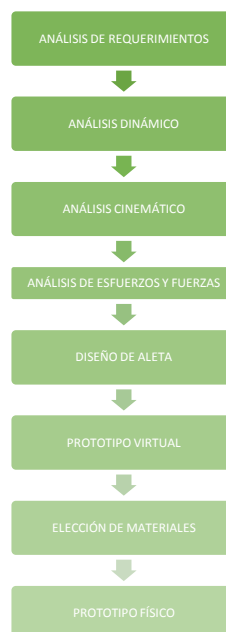


Figura 13. Proceso del diseño mecánico.

En el proceso del diseño mecánico, se siguen estos pasos para que el prototipo físico sea funcional y físicamente parecido al real, es decir a una trucha.

3.3.3 DISEÑO ELECTRÓNICO

En la etapa del diseño electrónico para que el prototipo mecatrónico cumpla con los requerimientos y especificaciones es importante determinar la capacidad de torque necesaria de cada servomotor para eso se procedió:

- Selección de los actuadores capaces de generar la fuerza de empuje óptima.
- Cálculo de la corriente necesaria para la alimentación de los cuatro subsistemas que conforman la cola.
- Elección de la fuente de energía que va a alimentar el prototipo.
- Diseño de la interfaz de alimentación del prototipo.
- Implementación del sistema, sinergia mecánica y electrónica.

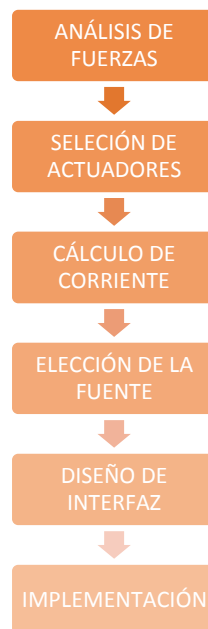


Figura 14. Proceso del diseño electrónico.

Es importante basar el diseño electrónico en el análisis de fuerzas obtenidas, por ejemplo al obtener el torque necesario para realizar el empuje del pez al escoger los actuadores segun el voltaje necesario, de igual forma la bateria necesaria para el sistema en su conjunto.

3.3.4 DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL

En la etapa de diseño del sistema de control, para que el prototipo mecatrónico cumpla con los requerimientos y especificaciones debió controlar los dos subsistemas de las aletas su posición velocidad aceleración para eso se procedió:

- Análisis del sistema completo mecánico y electrónico su funcionamiento principal.
- Elección del hardware que será el controlador principal del sistema.
- Programación del controlador en base a los requerimientos del sistema.
- Simulación del control de los subsistemas aletas y del sistema global.

- Implementación sinérgica Mecánica-electrónica-sistema de control.



Figura 15. Proceso del diseño del sistema de control.

En este proceso se toma en cuenta la sinergia entre los tres procesos de diseño ya que, dependiendo del diseño mecánico- electrónico, se deberá aumentar o disminuir las funciones del sistema de control.

3.4. PRUEBAS

Es necesario realizar esta fase del diseño para comprobar el adecuado funcionamiento del prototipo y verificar que el sistema cumple de forma adecuada tanto los requerimientos como las especificaciones establecidas por el usuario a condiciones de trabajo normal. Con respecto al diseño mecánico se utilizó el software CAD SOLIDWORKS 2014 para analizar y estudiar el comportamiento del modelo propuesto, además de realizar el diseño de las partes mecánicas.

Se procedió a la construcción del prototipo según los datos obtenidos en el diseño del sistema en paralelo. Después de construir el prototipo se procedió a realizar pruebas de funcionamiento, para lo cual se cumplió con el siguiente procedimiento:

- Validación del sistema en su diseño en conjunto.
- Validación del sistema simulando su movimiento.
- Movimiento correcto de todo el sistema de 4 eslabones.

3.5. MATERIALES

Para la construcción del prototipo mecatrónico se eligió componentes que por sus características facilitó el desempeño del robot los cuales se destacaron:

3.5.1 ARDUINO MICRO

Arduino es una plataforma de hardware libre, basada en una placa con un microcontrolador y un entorno de desarrollo, diseñada para el fácil uso de electrónica en proyectos multidisciplinarios.

Existen un sin número de arduinos en el mercado de los cuales se puede elegir, una característica principal del arduino es que presenta 7 canales PWM primordiales para el control de los 4 servomotores, otra característica de la placa arduino es su tamaño versátil y compatible con cualquier escala de diseño o dimensionamiento.

Tabla 1. Características arduino micro

Tensión de funcionamiento	5v
Voltaje de entrada recomendado	7-12v
Voltaje de entrada limite	6-20v
Pines Digitales I/O	20
Canales PWM	7
Canales de entrada analógicos	12
Longitud	48mm
Ancho	18mm
Peso	13g

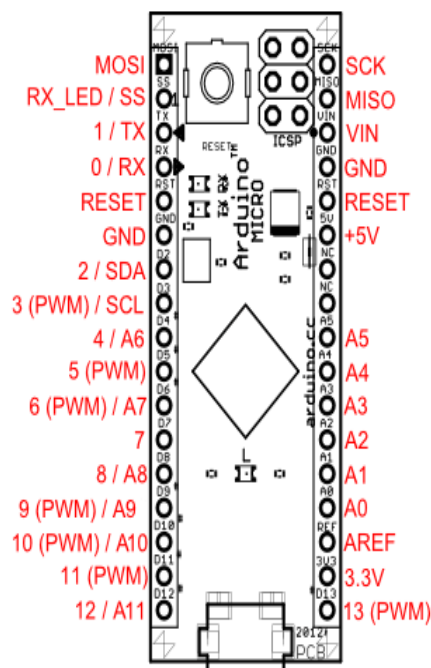


Figura 16. Asignación de pines arduino micro
(ARDUINO CC, 2015)

Debido a que Arduino micro cumple con requerimientos para las necesidades planteadas se escogió esta placa de programación. Tiene 12 salidas PWM, 16 entradas analógicas y comunicación I2C para expandir las salidas PWM.

3.5.2 SERVO MOTOR SG90

El servomotor es un actuador mecánico con la capacidad de ser controlado, que posee los suficientes elementos de control para que se pueda monitorizar los parámetros de su actuación mecánica, como posición, velocidad, y torque.

Como se muestra en la tabla 2 el torque que dan estos motores es más que suficiente para generar el torque que necesita el sistema para realizar el movimiento y romper las fuerzas que se oponen.

Tabla 2. Características ServoMotor SG90

Torque	42.8 oz-inch 3 kg-cm
Velocidad	0.10 sec/60° @ 4.8V
Peso	9 g
Dimensiones	Largo 22.2 mm ancho 11.8 mm, altura 31 mm
Tipo de motor	3-polos
Tipo de engranaje	Metálico
Voltaje	7.2 V

Se consideró el servomotor SG90 basados en los cálculos de torques y las fuerzas de empuje y levantamiento que deberán producir dichos servos, los datos técnicos del mismo nos indican que cumplen con las especificaciones y requerimientos; también su peso ligero y sus dimensiones pequeñas facilitan la construcción del prototipo con medidas racionales.

3.5.3 SENSOR ULTRASÓNICO HC-SR04

El sensor ultrasónico es capaz de detectar objetos de proximidad, libres del roce mecánico y pueden hacerlo a distancias de centímetros o metros inclusive.

El sensor enviará 8 Pulsos de 40KHz (Ultrasonido) y coloca su salida Echo a alto (seteo), se debe detectar este evento e iniciar un conteo de tiempo. La salida Echo se mantendrá en alto hasta recibir el eco reflejado por el obstáculo a lo cual el sensor pondrá su pin Echo a bajo, es decir, terminar de contar el tiempo tal como se muestra en la tabla 3.

Tabla 3. Características Sensor Ultrasónico HC-SR04

Tensión de alimentación	5 Vcc
Frecuencia de trabajo	40 KHz
Tiempo min. Medición	20 ms
Dimensiones	43*20*17mm
Rango máximo	4.7m
Rango mínimo	1.7cm

Se escogió este sensor por su compatibilidad con la placa arduino, además de su bajo costo, con respecto a su funcionamiento puede ser programado para funcionar en cualquier ambiente detectando cualquier tipo de objeto o la proximidad a uno.

4. DISEÑO

En la fase de diseño mecatrónico tras haber analizado las necesidades y requerimientos de cada subsistema, mecánico, eléctrico y de control, mediante el diseño en paralelo, se procedió al diseño de los tres subsistemas con cada especificación necesaria para que el prototipo cumpla los requerimientos especificados.

4.1 DISEÑO MECÁNICO

Esta etapa es fundamental en el diseño, ya que la eficacia y eficiencia de la locomoción del prototipo de robot está ligada estrechamente al diseño de los eslabones y aleta, el cual conlleva la selección de material, de la dimensión del prototipo de pez y de la sección transversal del mismo.

De acuerdo a (HuoshengHu, 2015), "El diseño comienza analizando las fuerzas de rozamiento que genera la superficie blanda sobre las aéreas de propulsión de las aletas o en el caso de los robots acuáticos el torque necesario en la aleta principal".

4.1.1. MODELO DINÁMICO

Para determinar el modelo dinámico del sistema de locomoción aleta es posible deducir su comportamiento a partir de las leyes físicas que lo rigen.

Este modelo matemático se realizó a partir del modelo de 4 grados de libertad en el plano sagital, que describe el movimiento de la aleta en la fase de locomoción, el cual se obtuvo aplicando las ecuaciones de LaGrange.

El sistema se compone de 4 eslabones a controlar:

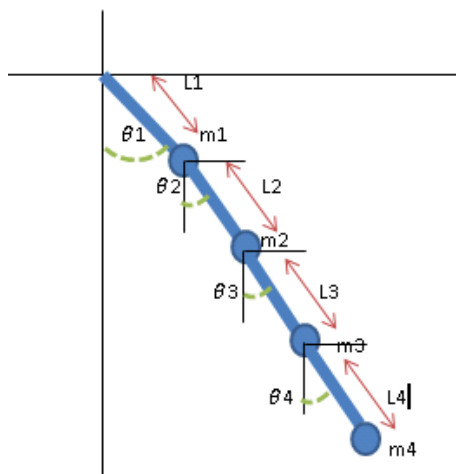


Figura 17. Diagrama del cuerpo libre del sistema de 4 eslabones

Como se planteó, cada segmento de la aleta se representa por sólidos rígidos. L es la longitud del segmento de cada eslabón y el valor de la masa (m) de cada articulación. Para obtener la ecuación del sistema analizado, primero se formuló la función de LaGrange, conocida como lagrangiano del sistema y es definida por:

$$\mathcal{L} = T - U \quad [1]$$

Dónde:

T : Energía cinética del sistema.

U: Energía potencial del sistema.

Energía cinética del sistema

Para este sistema rotatorio la energía cinética total se descompone como la suma de la energía cinética traslación y la energía cinética de rotación.

$$T = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}IW^2 \quad [2]$$

Dónde:

m: masa del sistema

V: velocidad lineal

W: velocidad angular.

I: Inercia

Energía potencial del sistema

Dependerá de la altura relativa de un objeto a algún punto de referencia, la masa y la fuerza de gravedad.

$$U = mgL \quad [3]$$

Dónde:

m: masa del sistema

g: gravedad

L: longitud

1) Obtención de la energía cinética.

Las coordenadas cartesianas:

$$X = \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ x2 \\ y2 \\ x3 \\ y3 \\ x4 \\ y4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \sin(\theta_1) \\ -L_1 \cos(\theta_1) \\ x_1 + L_2 \sin(\theta_2) \\ y_1 - L_2 \cos(\theta_2) \\ x_2 + L_3 \sin(\theta_3) \\ y_2 - L_3 \cos(\theta_3) \\ x_3 + L_4 \sin(\theta_4) \\ y_3 - L_4 \cos(\theta_4) \end{bmatrix}$$

Derivando las coordenadas para obtener la velocidad:

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}1 \\ \dot{y}1 \\ \dot{x}2 \\ \dot{y}2 \\ \dot{x}3 \\ \dot{y}3 \\ \dot{x}4 \\ \dot{y}4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 \\ L_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 \\ \dot{x}1 + L_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2 \\ \dot{y}1 + L_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 \\ \dot{x}2 + L_3 \cos(\theta_3) \dot{\theta}_3 \\ \dot{y}2 + L_3 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_3 \\ \dot{x}3 + L_4 \cos(\theta_4) \dot{\theta}_4 \\ \dot{y}3 + L_4 \sin(\theta_4) \dot{\theta}_4 \end{bmatrix}$$

Ecuación de la energía cinética del sistema de 4 eslabones:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \times v_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \times \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \times v_2^2 + \frac{1}{2} I_2 \times \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \times v_3^2 + \frac{1}{2} I_3 \times \omega_3^2 + \frac{1}{2} m_4 \times v_4^2 + \frac{1}{2} I_4 \times \omega_4^2$$

Remplazando la velocidad angular por $\dot{\theta}$ y la velocidad lineal por $\dot{x} + \dot{y}$ en la ecuación de la energía cinética del sistema:

$$\begin{cases} v = \dot{x} + \dot{y} \\ \omega = \dot{\theta} \end{cases} \text{ Para cada eslabón correspondientemente}$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \times (\dot{x}_1 + \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2} \times I_1 \times (\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 \times (\dot{x}_2 + \dot{y}_2)^2 + \frac{1}{2} \times I_2 \times (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2} m_3 \times (\dot{x}_3 + \dot{y}_3)^2 + \frac{1}{2} \times I_3 \times (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 + \frac{1}{2} m_4 \times (\dot{x}_4 + \dot{y}_4)^2 + \frac{1}{2} \times I_4 \times (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)^2$$

Remplazando $\dot{x} + \dot{y}$ por sus respectivas derivadas en la ecuación de la energía cinética del sistema y simplificando la expresión se obtiene:

$$T = \left(m_1 \times (L_1 \times \dot{\theta}_1 \times \cos(\theta_1) + L_1 \times \dot{\theta}_1 \times \sin(\theta_1))^2 \right) \times \frac{1}{2} + (I_1 \times \dot{\theta}_1^2) \times \frac{1}{2} + \left(m_2 \times (L_1 \times \dot{\theta}_1 \times \cos(\theta_1) + L_2 \times \dot{\theta}_2 \times \cos(\theta_2) + L_1 \times \dot{\theta}_1 \times \sin(\theta_1) + L_2 \times \dot{\theta}_2 \times \sin(\theta_2))^2 \right) \times \frac{1}{2} + (I_2 \times (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2) \times \frac{1}{2} + \left(m_3 \times (L_1 \times \dot{\theta}_1 \times \cos(\theta_1) + L_2 \times \dot{\theta}_2 \times \cos(\theta_2) + L_3 \times \dot{\theta}_3 \times \cos(\theta_3) + L_1 \times \dot{\theta}_1 \times \sin(\theta_1) + L_2 \times \dot{\theta}_2 \times \sin(\theta_2) + L_3 \times \dot{\theta}_3 \times \sin(\theta_3))^2 \right) \times \frac{1}{2} + (I_3 \times (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2) \times \frac{1}{2} + \left(m_4 \times (L_1 \times \dot{\theta}_1 \times \cos(\theta_1) + L_2 \times \dot{\theta}_2 \times \cos(\theta_2) + L_3 \times \dot{\theta}_3 \times \cos(\theta_3) + L_4 \times \dot{\theta}_4 \times \cos(\theta_4) + L_1 \times \dot{\theta}_1 \times \sin(\theta_1) + L_2 \times \dot{\theta}_2 \times \sin(\theta_2) + L_3 \times \dot{\theta}_3 \times \sin(\theta_3) + L_4 \times \dot{\theta}_4 \times \sin(\theta_4))^2 \right) \times \frac{1}{2} + (I_4 \times (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)^2) \times \frac{1}{2}$$

1) Obtención de la energía potencial

Ecuación de la energía potencial del sistema de 4 eslabones:

$$U = m_1 \times g \times y_1 + m_2 \times g \times y_2 + m_3 \times g \times y_3 + m_4 \times g \times y_4$$

Reemplazando (y) por (L x cos(θ)) en la ecuación:

$$U = -L_1 \times g \times m_1 \times \cos(\theta_1) - g \times m_2 \times (L_1 \times \cos(\theta_1) + L_2 \times \cos(\theta_2)) - g \times m_3 \times (L_1 \times \cos(\theta_1) + L_2 \times \cos(\theta_2) + L_3 \times \cos(\theta_3)) - g \times m_4 \times (L_1 \times \cos(\theta_1) + L_2 \times \cos(\theta_2) + L_3 \times \cos(\theta_3) + L_4 \times \cos(\theta_4))$$

Considerando las ecuaciones anteriores el lagrangeano del sistema será.

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$\mathcal{L} = \left(m_1 \times (L_1 \times \dot{\theta}_1 \times \cos(\theta_1) + L_1 \times \dot{\theta}_1 \times \sin(\theta_1))^2 \right) \times \frac{1}{2} + (I_1 \times \dot{\theta}_1^2) \times \frac{1}{2} + L_1 \times g \times m_1 \times \cos(\theta_1) + \left(m_2 \times (L_1 \times \dot{\theta}_1 \times \cos(\theta_1) + L_2 \times \dot{\theta}_2 \times \cos(\theta_2) + L_1 \times \dot{\theta}_1 \times \sin(\theta_1) + L_2 \times \dot{\theta}_2 \times \sin(\theta_2))^2 \right) \times \frac{1}{2} + (I_2 \times (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2) \times \frac{1}{2} + g \times m_2 \times (L_1 \times \cos(\theta_1) + L_2 \times \cos(\theta_2)) + \left(m_3 \times (L_1 \times \dot{\theta}_1 \times \cos(\theta_1) + L_2 \times \dot{\theta}_2 \times \cos(\theta_2) + L_3 \times \dot{\theta}_3 \times \cos(\theta_3) + L_1 \times \dot{\theta}_1 \times \sin(\theta_1) + L_2 \times \dot{\theta}_2 \times \sin(\theta_2) + L_3 \times \dot{\theta}_3 \times \sin(\theta_3))^2 \right) \times \frac{1}{2} + (I_3 \times (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2) \times \frac{1}{2} + g \times m_3 \times (L_1 \times \cos(\theta_1) + L_2 \times \cos(\theta_2) + L_3 \times \cos(\theta_3)) + \left(m_4 \times (L_1 \times \dot{\theta}_1 \times \cos(\theta_1) + L_2 \times \dot{\theta}_2 \times \cos(\theta_2) + L_3 \times \dot{\theta}_3 \times \cos(\theta_3) + L_4 \times \dot{\theta}_4 \times \cos(\theta_4) + L_1 \times \dot{\theta}_1 \times \sin(\theta_1) + L_2 \times \dot{\theta}_2 \times \sin(\theta_2) + L_3 \times \dot{\theta}_3 \times \sin(\theta_3) + L_4 \times \dot{\theta}_4 \times \sin(\theta_4))^2 \right) \times \frac{1}{2} + (I_4 \times (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)^2) \times \frac{1}{2} + g \times m_4 \times (L_1 \times \cos(\theta_1) + L_2 \times \cos(\theta_2) + L_3 \times \cos(\theta_3) + L_4 \times \cos(\theta_4))$$

$$\begin{aligned} & \cos(\theta_3)) + (m_4 \times (L_1 \times \dot{\theta}_1 \times \cos(\theta_1) + L_2 \times \dot{\theta}_2 \times \cos(\theta_2) + L_3 \times \dot{\theta}_3 \times \cos(\theta_3) + \\ & L_4 \times \dot{\theta}_4 \times \cos(\theta_4) + L_1 \times \dot{\theta}_1 \times \sin(\theta_1) + L_2 \times \dot{\theta}_2 \times \sin(\theta_2) + L_3 \times \dot{\theta}_3 \times \sin(\theta_3) + \\ & L_4 \times \dot{\theta}_4 \times \sin(\theta_4))^2 \times \frac{1}{2} + (I_4 \times (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)^2) \times \frac{1}{2} + g \times m_4 \times (L_1 \times \\ & \cos(\theta_1) + L_2 \times \cos(\theta_2) + L_3 \times \cos(\theta_3) + L_4 \times \cos(\theta_4)) \end{aligned}$$

A partir de LaGrange se obtiene la ecuación del sistema:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\theta}} \right) - \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \theta} \right) = \tau \quad [4]$$

A partir de la ecuación 4 se obtiene la ecuación de LaGrange para cada eslabón:

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\theta}_1} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \theta_1} = \tau_1$$

$$\begin{aligned} \tau_1 = & \ddot{\theta}_1 * (I_1 * \dot{\theta}_1 + I_2 * \dot{\theta}_1 + I_2 * \dot{\theta}_2 + I_3 * \dot{\theta}_1 + I_3 * \dot{\theta}_2 + I_4 * \dot{\theta}_1 + I_3 * \dot{\theta}_3 + I_4 * \\ & \dot{\theta}_2 + I_4 * \dot{\theta}_3 + I_4 * \dot{\theta}_4 + L_1^2 * \dot{\theta}_1 * m_1 + L_1^2 * \dot{\theta}_1 * m_2 + L_1^2 * \dot{\theta}_1 * m_3 + L_1^2 * \\ & \dot{\theta}_1 * m_4 + L_1^2 * \dot{\theta}_1 * m_1 * \sin(2 * \theta_1) + L_1^2 * \dot{\theta}_1 * m_2 * \sin(2 * \theta_1) + L_1^2 * \dot{\theta}_1 * m_3 * \\ & \sin(2 * \theta_1) + L_1^2 * \dot{\theta}_1 * m_4 * \sin(2 * \theta_1) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_2 * m_2 * \sin(\theta_1 + \theta_2) + L_1 * L_2 * \\ & \dot{\theta}_2 * m_3 * \sin(\theta_1 + \theta_2) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_2 * m_4 * \sin(\theta_1 + \theta_2) + L_1 * L_3 * \dot{\theta}_3 * m_3 * \\ & \sin(\theta_1 + \theta_3) + L_1 * L_3 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \sin(\theta_1 + \theta_3) + L_1 * L_4 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \sin(\theta_1 + \theta_4) + \\ & L_1 * L_2 * \dot{\theta}_2 * m_2 * \cos(\theta_1 - \theta_2) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_2 * m_3 * \cos(\theta_1 - \theta_2) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_2 * \\ & m_4 * \cos(\theta_1 - \theta_2) + L_1 * L_3 * \dot{\theta}_3 * m_3 * \cos(\theta_1 - \theta_3) + L_1 * L_3 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \cos(\theta_1 - \\ & \theta_3) + L_1 * L_4 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_1 - \theta_4) + L_1^2 * \dot{\theta}_1^3 * m_1 * \sin(\theta_1) + L_1^2 * \dot{\theta}_1^3 * \\ & m_2 * \sin(\theta_1) + L_1^2 * \dot{\theta}_1^3 * m_3 * \sin(\theta_1) + L_1^2 * \dot{\theta}_1^3 * m_4 * \sin(\theta_1) - L_1^2 * \dot{\theta}_1^2 * \\ & m_1 * (\dot{\theta}_1 * \cos(\theta_1)^2 - \dot{\theta}_1 * \sin(\theta_1)^2) - L_1^2 * \dot{\theta}_1^2 * m_2 * (\dot{\theta}_1 * \cos(\theta_1)^2 - \dot{\theta}_1 * \\ & \sin(\theta_1)^2) - L_1^2 * \dot{\theta}_1^2 * m_3 * (\dot{\theta}_1 * \cos(\theta_1)^2 - \dot{\theta}_1 * \sin(\theta_1)^2) - L_1^2 * \dot{\theta}_1^2 * \\ & m_4 * (\dot{\theta}_1 * \cos(\theta_1)^2 - \dot{\theta}_1 * \sin(\theta_1)^2) - L_1^2 * \dot{\theta}_1^3 * m_1 * \cos(\theta_1) - L_1^2 * \dot{\theta}_1^3 * \\ & m_2 * \cos(\theta_1) - L_1^2 * \dot{\theta}_1^3 * m_3 * \cos(\theta_1) - L_1^2 * \dot{\theta}_1^3 * m_4 * \cos(\theta_1) + L_1 * \dot{\theta}_1 * g * \\ & m_1 * \sin(\theta_1) + L_1 * \dot{\theta}_1 * g * m_2 * \sin(\theta_1) + L_1 * \dot{\theta}_1 * g * m_3 * \sin(\theta_1) + L_1 * \dot{\theta}_1 * g * \\ & m_4 * \sin(\theta_1) - L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1^2 * \dot{\theta}_2 * m_2 * \cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1^2 * \dot{\theta}_2 * m_2 * \\ & \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1) - L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1^2 * \dot{\theta}_2 * m_3 * \cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1^2 * \dot{\theta}_2 * \\ & m_3 * \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1) - L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1^2 * \dot{\theta}_2 * m_4 * \cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1^2 * \\ & \dot{\theta}_2 * m_4 * \cos(\theta_2) * \sin(\theta_1) - L_1 * L_3 * \dot{\theta}_1^2 * \dot{\theta}_3 * m_3 * \cos(\theta_1) * \sin(\theta_3) + L_1 * L_3 * \\ & \dot{\theta}_1^2 * \dot{\theta}_3 * m_3 * \cos(\theta_3) * \sin(\theta_1) - L_1 * L_3 * \dot{\theta}_1^2 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \cos(\theta_1) * \sin(\theta_3) + L_1 * \\ & L_3 * \dot{\theta}_1^2 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \cos(\theta_3) * \sin(\theta_1) - L_1 * L_4 * \dot{\theta}_1^2 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_1) * \sin(\theta_4) + \\ & L_1 * L_4 * \dot{\theta}_1^2 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_4) * \sin(\theta_1) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1^2 * \dot{\theta}_2 * m_2 * \sin(\theta_1) * \\ & \sin(\theta_2) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1^2 * \dot{\theta}_2 * m_3 * \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1^2 * \dot{\theta}_2 * m_4 * \\ & \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2) + L_1 * L_3 * \dot{\theta}_1^2 * \dot{\theta}_3 * m_3 * \sin(\theta_1) * \sin(\theta_3) + L_1 * L_3 * \dot{\theta}_1^2 * \dot{\theta}_3 * \\ & m_4 * \sin(\theta_1) * \sin(\theta_3) + L_1 * L_4 * \dot{\theta}_1^2 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \sin(\theta_1) * \sin(\theta_4) - L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1^2 * \\ & \dot{\theta}_2 * m_2 * \cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1^2 * \dot{\theta}_2 * m_3 * \cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - L_1 * L_2 * \\ & \dot{\theta}_1^2 * \dot{\theta}_2 * m_4 * \cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - L_1 * L_3 * \dot{\theta}_1^2 * \dot{\theta}_3 * m_3 * \cos(\theta_1) * \cos(\theta_3) - L_1 * \\ & L_3 * \dot{\theta}_1^2 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \cos(\theta_1) * \cos(\theta_3) - L_1 * L_4 * \dot{\theta}_1^2 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_1) * \cos(\theta_4) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\theta}_2} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \theta_2} = \tau_2$$

$$\tau_2 = \ddot{\theta}_2 * (I_2 * \dot{\theta}_1 + I_2 * \dot{\theta}_2 + I_3 * \dot{\theta}_1 + I_3 * \dot{\theta}_2 + I_4 * \dot{\theta}_1 + I_3 * \dot{\theta}_3 + I_4 * \dot{\theta}_2 + I_4 * \\ \dot{\theta}_3 + I_4 * \dot{\theta}_4 + L_2^2 * \dot{\theta}_2 * m_2 + L_2^2 * \dot{\theta}_2 * m_3 + L_2^2 * \dot{\theta}_2 * m_4 + L_2^2 * \dot{\theta}_2 * m_2 *)$$

$$\begin{aligned} & \sin(2 * \theta_2) + L_2^2 * \dot{\theta}_2 * m_3 * \sin(2 * \theta_2) + L_2^2 * \dot{\theta}_2 * m_4 * \sin(2 * \theta_2) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1 * \\ & m_2 * \sin(\theta_1 + \theta_2) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1 * m_3 * \sin(\theta_1 + \theta_2) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1 * m_4 * \sin(\theta_1 + \\ & \theta_2) + L_2 * L_3 * \dot{\theta}_3 * m_3 * \sin(\theta_2 + \theta_3) + L_2 * L_3 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \sin(\theta_2 + \theta_3) + L_2 * L_4 * \\ & \dot{\theta}_4 * m_4 * \sin(\theta_2 + \theta_4) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1 * m_2 * \cos(\theta_1 - \theta_2) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1 * m_3 * \\ & \cos(\theta_1 - \theta_2) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1 * m_4 * \cos(\theta_1 - \theta_2) + L_2 * L_3 * \dot{\theta}_3 * m_3 * \cos(\theta_2 - \theta_3) + \\ & L_2 * L_3 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \cos(\theta_2 - \theta_3) + L_2 * L_4 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_2 - \theta_4)) - L_2 * \dot{\theta}_2 * (L_2 * \\ & \dot{\theta}_2^2 * m_2 * \cos(\theta_2) - g * m_3 * \sin(\theta_2) - g * m_4 * \sin(\theta_2) - g * m_2 * \sin(\theta_2) + L_2 * \\ & \dot{\theta}_2^2 * m_3 * \cos(\theta_2) + L_2 * \dot{\theta}_2^2 * m_4 * \cos(\theta_2) - L_2 * \dot{\theta}_2^2 * m_2 * \sin(\theta_2) - L_2 * \\ & \dot{\theta}_2^2 * m_3 * \sin(\theta_2) - L_2 * \dot{\theta}_2^2 * m_4 * \sin(\theta_2) + L_2 * \dot{\theta}_2^2 * m_2 * \cos(2 * \theta_2) + L_2 * \\ & \dot{\theta}_2^2 * m_3 * \cos(2 * \theta_2) + L_2 * \dot{\theta}_2^2 * m_4 * \cos(2 * \theta_2) + L_1 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_2 * m_2 * \cos(\theta_1 + \\ & \theta_2) + L_1 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_2 * m_3 * \cos(\theta_1 + \theta_2) + L_1 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_2 * m_4 * \cos(\theta_1 + \theta_2) + L_3 * \dot{\theta}_2 * \\ & \dot{\theta}_3 * m_3 * \cos(\theta_2 + \theta_3) + L_3 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \cos(\theta_2 + \theta_3) + L_4 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \\ & \cos(\theta_2 + \theta_4) + L_1 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_2 * m_2 * \sin(\theta_1 - \theta_2) + L_1 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_2 * m_3 * \sin(\theta_1 - \theta_2) + \\ & L_1 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_2 * m_4 * \sin(\theta_1 - \theta_2) - L_3 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * m_3 * \sin(\theta_2 - \theta_3) - L_3 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * \\ & m_4 * \sin(\theta_2 - \theta_3) - L_4 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \sin(\theta_2 - \theta_4)) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\theta}_3} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \theta_3} = \tau_3$$

$$\begin{aligned} \tau_3 = & \ddot{\theta}_3 * (I_3 * \dot{\theta}_1 + I_3 * \dot{\theta}_2 + I_4 * \dot{\theta}_1 + I_3 * \dot{\theta}_3 + I_4 * \dot{\theta}_2 + I_4 * \dot{\theta}_3 + I_4 * \dot{\theta}_4 + L_3^2 * \\ & \dot{\theta}_3 * m_3 + L_3^2 * \dot{\theta}_3 * m_4 + L_3^2 * \dot{\theta}_3 * m_3 * \sin(2 * \theta_3) + L_3^2 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \sin(2 * \\ & \theta_3) + L_1 * L_3 * \dot{\theta}_1 * m_3 * \cos(\theta_1) * \cos(\theta_3) + L_1 * L_3 * \dot{\theta}_1 * m_4 * \cos(\theta_1) * \cos(\theta_3) + \\ & L_2 * L_3 * \dot{\theta}_2 * m_3 * \cos(\theta_2) * \cos(\theta_3) + L_2 * L_3 * \dot{\theta}_2 * m_4 * \cos(\theta_2) * \cos(\theta_3) + L_3 * L_4 * \\ & \dot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_3) * \cos(\theta_4)) - L_3 * \dot{\theta}_3 * (L_3 * \dot{\theta}_3^2 * m_3 * \cos(\theta_3) - g * m_4 * \sin(\theta_3) - \\ & g * m_3 * \sin(\theta_3) + L_3 * \dot{\theta}_3^2 * m_4 * \cos(\theta_3) - L_3 * \dot{\theta}_3^2 * m_3 * \sin(\theta_3) - L_3 * \dot{\theta}_3^2 * \\ & m_4 * \sin(\theta_3) + L_3 * \dot{\theta}_3^2 * m_3 * \cos(2 * \theta_3) + L_3 * \dot{\theta}_3^2 * m_4 * \cos(2 * \theta_3) + L_1 * \dot{\theta}_1 * \\ & \dot{\theta}_3 * m_3 * \cos(\theta_1 + \theta_3) + L_1 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \cos(\theta_1 + \theta_3) + L_2 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * m_3 * \\ & \cos(\theta_2 + \theta_3) + L_2 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \cos(\theta_2 + \theta_3) + L_4 * \dot{\theta}_3 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_3 + \theta_4) + \\ & L_1 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_3 * m_3 * \sin(\theta_1 - \theta_3) + L_1 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \sin(\theta_1 - \theta_3) + L_2 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * \\ & m_3 * \sin(\theta_2 - \theta_3) + L_2 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \sin(\theta_2 - \theta_3) - L_4 * \dot{\theta}_3 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \sin(\theta_3 - \\ & \theta_4)) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\theta}_4} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \theta_4} = \tau_4$$

$$\begin{aligned} \tau_4 = & \ddot{\theta}_4 * (I_4 * \dot{\theta}_1 + I_4 * \dot{\theta}_2 + I_4 * \dot{\theta}_3 + I_4 * \dot{\theta}_4 + L_4^2 * \dot{\theta}_4 * m_4 + L_4^2 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \\ & \sin(2 * \theta_4) + L_1 * L_4 * \dot{\theta}_1 * m_4 * \sin(\theta_1 + \theta_4) + L_2 * L_4 * \dot{\theta}_2 * m_4 * \sin(\theta_2 + \theta_4) + L_3 * \\ & L_4 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \sin(\theta_3 + \theta_4) + L_1 * L_4 * \dot{\theta}_1 * m_4 * \cos(\theta_1 - \theta_4) + L_2 * L_4 * \dot{\theta}_2 * m_4 * \\ & \cos(\theta_2 - \theta_4) + L_3 * L_4 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \cos(\theta_3 - \theta_4)) - L_4 * \dot{\theta}_4 * m_4 * (L_4 * \dot{\theta}_4^2 * \cos(2 * \\ & \theta_4) - L_4 * \dot{\theta}_4^2 * \sin(\theta_4) - g * \sin(\theta_4) + L_4 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_4 * \cos(\theta_4) + L_1 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_4 * \\ & \sin(\theta_1 - \theta_4) + L_2 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_4 * \sin(\theta_2 - \theta_4) + L_3 * \dot{\theta}_3 * \dot{\theta}_4 * \sin(\theta_3 - \theta_4) + L_1 * \dot{\theta}_1 * \\ & \dot{\theta}_4 * \cos(\theta_1 + \theta_4) + L_2 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_4 * \cos(\theta_2 + \theta_4) + L_3 * \dot{\theta}_3 * \dot{\theta}_4 * \cos(\theta_3 + \theta_4)) \end{aligned}$$

Dónde:

$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$: Masa de cada eslabón

g : Gravedad

L_i : Longitud de cada eslabón

I : Inercia

En la tabla 4 la masa (m), es el mismo valor para todos los eslabones porque, la masa de cada eslabón por su material de impresión en 3d, es despreciable con respecto a la masa del actuador en cada articulación.

Tabla 4. Datos del sistema.

m	0.30kg
L_1	0.0124m
L_2	0.0055m
L_3	0.0055m
L_4	0.0120m
I	$0.0006kg * m^2$
g	$9.8m/s^2$

4.1.2 MODELO CINEMÁTICO

Para obtener el modelo cinemático se cuenta con diferentes métodos, para este estudio se abordó el método de las matrices de transformación homogénea el cual representan las rotaciones y desplazamientos que existen al largo de la cadena cinemática completa.

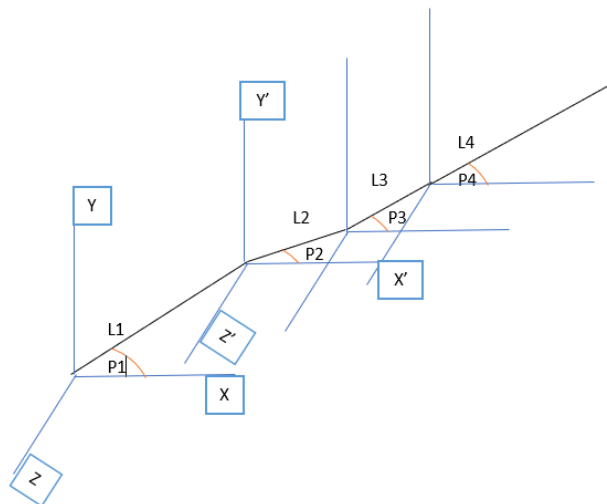


Figura 18. Sistema de Coordenadas

La matriz de transformación homogénea facilita el estudio de la traslación y rotación de las cadenas cinemáticas, en este caso el sistema solo presenta la traslación con respecto al plano de referencia XY.

El primer eslabón representado por P1 con respecto al plano XY tiene por coordenadas:

$$x = L_1 * \cos(\theta_1)$$

$$y = L_1 * \sin(\theta_1)$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 * \cos(\theta_1) \\ L_1 * \text{sen}(\theta_1) \end{bmatrix}$$

El segundo eslabón representado por P2 con respecto al plano X'Y' tiene por coordenadas:

$$\begin{aligned} x' &= L_2 * \cos(\theta_2) \\ y' &= L_2 * \text{sen}(\theta_2) \\ P_2 &= \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2 * \cos(\theta_2) \\ L_2 * \text{sen}(\theta_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El tercer eslabón representado por P3 con respecto al plano X''Y'' tiene por coordenadas:

$$P_3 = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_3 * \cos(\theta_3) \\ L_3 * \text{sen}(\theta_3) \end{bmatrix}$$

El cuarto eslabón representado por P4 con respecto al plano X'''Y''' tiene por coordenadas:

$$P_4 = \begin{bmatrix} x''' \\ y''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_4 * \cos(\theta_4) \\ L_4 * \text{sen}(\theta_4) \end{bmatrix}$$

Matriz homogénea de P2 con respecto a P1:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P_2X \\ P_2Y \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_1 * \cos(\theta_1) \\ L_1 * \text{sen}(\theta_1) \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_2 * \cos(\theta_2) \\ L_2 * \text{sen}(\theta_2) \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} P_2X \\ P_2Y \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_1 * \cos(\theta_1) + L_2 * \cos(\theta_2) \\ L_1 * \text{sen}(\theta_1) + L_2 * \text{sen}(\theta_2) \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matriz homogénea de P3 con respecto a P2P1:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P_3X \\ P_3Y \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_1 * \cos(\theta_1) + L_2 * \cos(\theta_2) \\ L_1 * \text{sen}(\theta_1) + L_2 * \text{sen}(\theta_2) \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_3 * \cos(\theta_3) \\ L_3 * \text{sen}(\theta_3) \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} P_3X \\ P_3Y \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_1 * \cos(\theta_1) + L_2 * \cos(\theta_2) + L_3 * \cos(\theta_3) \\ L_1 * \text{sen}(\theta_1) + L_2 * \text{sen}(\theta_2) + L_3 * \text{sen}(\theta_3) \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matriz homogénea de P4 con respecto a P3P2P1:

$$\begin{bmatrix} P_4X \\ P_4Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 * \cos(\theta_1) + L_2 * \cos(\theta_2) + L_3 * \cos(\theta_3) \\ L_1 * \text{sen}(\theta_1) + L_2 * \text{sen}(\theta_2) + L_3 * \text{sen}(\theta_3) \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_4 * \cos(\theta_4) \\ L_4 * \text{sen}(\theta_4) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_4 X \\ P_4 Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 * \cos(\theta_1) + L_2 * \cos(\theta_2) + L_3 * \cos(\theta_3) + L_4 * \cos(\theta_4) \\ L_1 * \text{sen}(\theta_1) + L_2 * \text{sen}(\theta_2) + L_3 * \text{sen}(\theta_3) + L_4 * \text{sen}(\theta_4) \\ 1 \end{bmatrix}$$

4.1.3 ESFUERZOS

El análisis de los esfuerzos en los eslabones es la parte fundamental del diseño mecánico del sistema y principalmente del modelo mecánico, este análisis mostro los datos necesarios tales como, las secciones transversales de las aletas, materiales y modos de sujeción de los subsistemas.

4.1.3.1 FUERZA DE EMPUJE

El estudio de los esfuerzos comenzó con el cálculo de la fuerza hidrostática del pez, mediante esta fórmula podemos despejar la profundidad a la que el prototipo tendrá un equilibrio y se mantendrá sumergido.

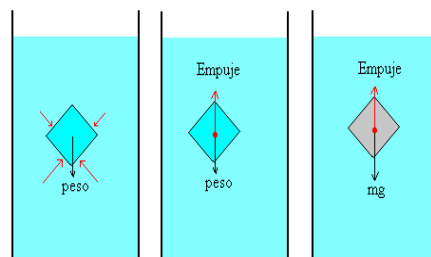


Figura 19. Representación de la fuerza hidrostática
(BioEnciclopedia, 2015)

Para realizar el siguiente cálculo se necesita conocer el volumen o un volumen aproximado del prototipo: (v)

Se utiliza la densidad del material ya que se necesita calcular el volumen del prototipo.

Densidad del material de impresión 3d: $d = 1.07 \text{ kg/m}^3$ (solivan, 2016).

Masa del prototipo obtenida al pesar el prototipo: $m = 1.5 \text{ kg}$

$$v = \frac{m}{d}$$

$$v = \frac{1.5 \text{ kg}}{1.07 \text{ kg/m}^3}$$

$$v = 1.40 \text{ m}^3$$

A partir de la ecuación 5 se obtiene la fuerza de reacción(E) necesario para la flotabilidad del pez.

E: Fuerza de reacción

$$E = v * g * d \quad [5]$$

En la tabla 5 se encuentran los datos necesarios para saber si el prototipo flotara o no.

Tabla 5. Datos de fuerza hidrostática.

M Masa del prototipo	1.50 kg
df Densidad del liquido	1000 kg/m ³ *
v Volumen del prototipo	1.40 m ³
g Gravedad	9.81 m/s ²

* (Berrendi, 2013)

$$E = v * df * g$$
$$E = 1.40 \text{ m}^3 * 1000 \text{ Kg/m}^3 * 9.81 \text{ m/s}^2$$
$$E = 13720 \text{ N}$$

A partir de la ecuación 6 obtenemos el empuje hidrostático (Fg), necesario para determinar la flotabilidad del pez

$$Fg = m * g \quad [6]$$
$$Fg = 1.5 \text{ Kg} * 9.8 \text{ m/s}^2$$
$$Fg = 14.7 \text{ N}$$

Claramente la fuerza de empuje hidrostático Fg es mucho menor a la fuerza de reacción E esto demuestra que el prototipo si flotara en el agua. La fuerza necesaria para mantener al prototipo sumergido en el agua (F) a una profundidad determinada se obtiene a partir de la ecuación 7.

$$F = E - m * g \quad [7]$$
$$F = 13720 \text{ N} - 1.50 \text{ Kg} * 9.8 \text{ m/s}^2$$
$$F = 13705.3 \text{ N}$$

Estas fuerzas pueden variar al tomar en cuenta futuras aplicaciones del prototipo o incluso materiales a ser añadidos después.

4.1.3.3 SECCIÓN TRANSVERSAL

Dado que se obtuvo la fuerza principal de empuje activo se puede diseñar la sección transversal de la aleta.

En la figura 20 se muestra los diagramas de momentos cortante y flector. A partir de este último se obtiene el máximo momento, con este se calculará la sección transversal mínima.

Para eslabón (cola):

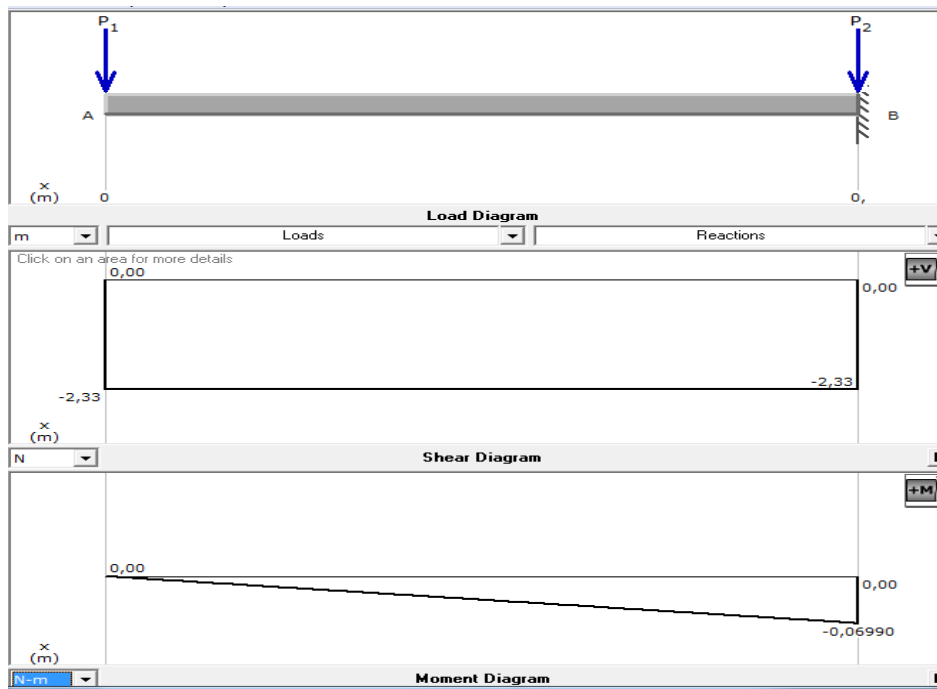


Figura 20. Diagrama de momentos cortante y flector (cola).

En la figura 20 podemos observar los diagramas de momento flector y cortante, nos muestran las fuerzas y momento que actúan en la cola y su valor, con estos valores podremos calcular la sección transversal de la cola para que no falle.

$$\sigma a = \frac{\eta}{S} \quad [8]$$

Donde:

σa = Esfuerzo maximo esperado

η = momento flector máximo

S = Módulo de Sección transversal rectangular

Se calculará el valor mínimo de S , a partir del esfuerzo de diseño:

$$\sigma d = \frac{S y}{N} \quad [9]$$

Donde:

σd = Esfuerzo maximo de diseño

$S y$ = Resistencia a la fluencia: La resistencia a la fluencia es tomada de la tabla 6, de las propiedades fisico-mecanicas del material de impresión.

N = Factor de seguridad

$$\sigma d = \frac{35 \text{ Mpa}}{2}$$

$$\sigma d = 17.5 \text{ Mpa}$$

Ahora se debe asegurar que el esfuerzo máximo esperado, no sea mayor que el esfuerzo de diseño.

En la ecuación [10] se utiliza la ecuación [8] para poder despejar (s) la sección transversal calculado por los esfuerzos máximos.

η = momento generado en el diagrama de momentos de la figura 20.

$$\begin{aligned} \sigma a &= \sigma d \\ S &= \frac{\eta}{\sigma d} \\ S_{\text{esfuerzos maximos}} &= \frac{0.069Nm}{17.5Mpa} \\ S_{\text{esfuerzos maximos}} &= 4 \text{ mm}^3 \end{aligned} \quad [10]$$

La relacion de $S_{\text{diseño}}$ con las dimensiones geometricas debe ser mayor o igual al $S_{\text{esfuerzos maximos}}$ previamente calculado y se calcula:

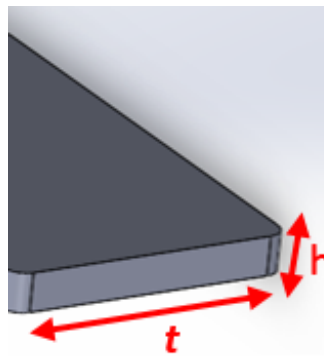


Figura 21. Dimensiones geométricas

$$\begin{aligned} S &= \frac{t \cdot h^2}{6} \\ S_{\text{diseño}} &= \frac{20mm \cdot 6mm^2}{6} \\ S_{\text{diseño}} &= 20mm^3 \end{aligned} \quad [11]$$

Este resultado muestra que el $S_{\text{diseño}}$ es mayor al $S_{\text{esfuerzos maximos}}$ por lo tanto el prototipo no corre ningún riesgo de sufrir alguna ruptura o daño causado por los esfuerzos que actuarían sobre él al estar en funcionamiento.

4.1.4 MODELO CAD

Es necesario dimensionar las partes del robot para su correcto funcionamiento del prototipo, mediante la herramienta SolidWorks basado en técnicas de modelado con sistemas CAD, se puede obtener y realizar un modelo virtual del robot.

Para la sujeción de los servos que conforman la cadena cinemática del prototipo se utilizó servo brackets tipo C los cuales irán empernados a la placa plastrón.

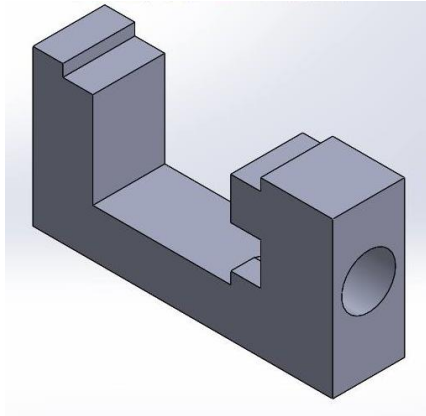


Figura 22. Servo bracket tipo C.

Mediante el montaje anterior es necesario usar servo brackets tipo U para el correcto movimiento del prototipo.

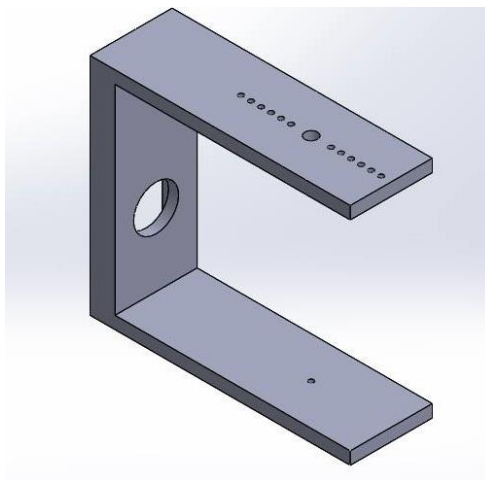


Figura 23. Servo bracket tipo U.

La parte principal del prototipo es la aleta la cual ejercerá la fuerza de empuje, para esto se diseñó la cadena cinemática, luego de dichos diseños y los cálculos de las secciones transversales y el material que se utilizó en la aleta.

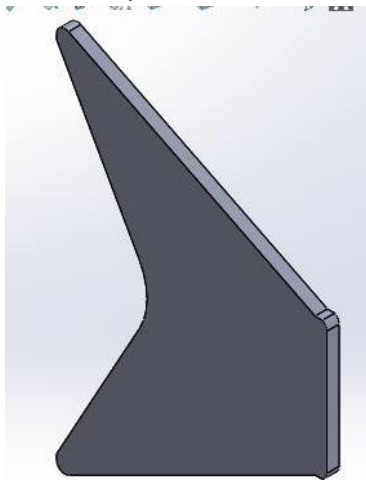


Figura 24. Aleta del prototipo

Para la utilización de la placa, sensor y batería serán colocados en la parte de la cabeza, por ello se diseñó hueca.

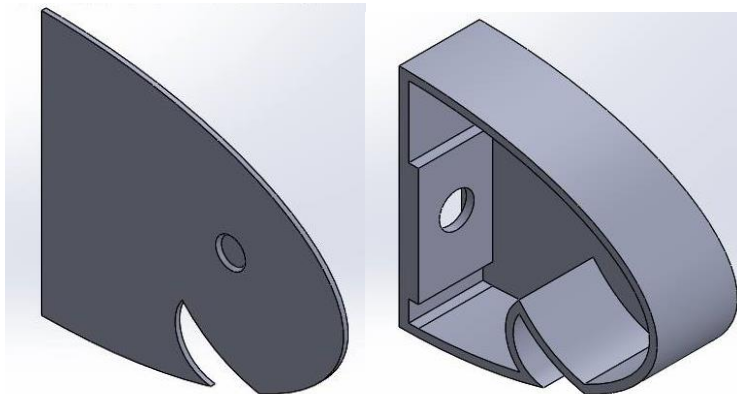


Figura 25. Cabeza del prototipo

Ensamblaje del prototipo

En la figura 26 se muestra el ensamblaje del prototipo incluyendo los actuadores, placa y sensor.

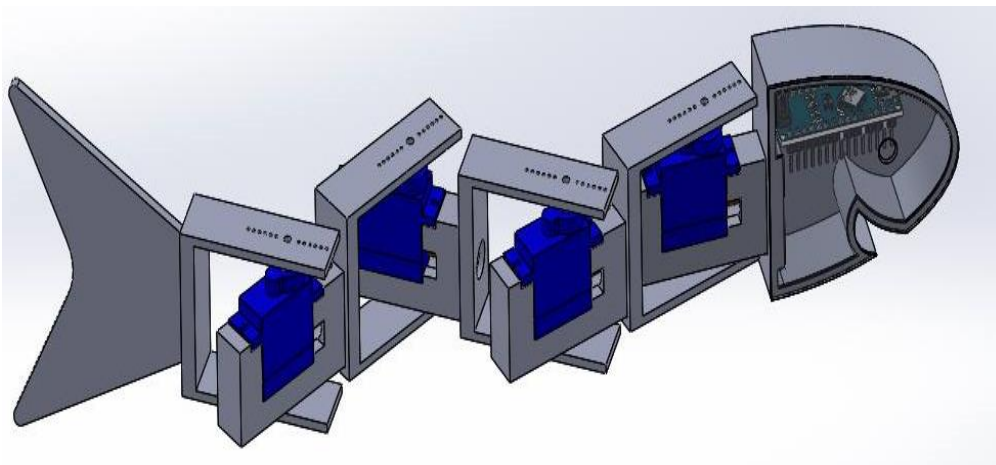


Figura 26. Ensamblaje final del prototipo

El ensamblaje se consideró todas sus partes tanto mecánicas, electrónicas en la simulación, para saber el espacio necesario para las piezas.

4.1.5 SELECCIÓN DE MATERIALES

El prototipo robótico del pez tiene varias partes fundamentales, las cuales fueron fabricadas y mecanizadas según la necesidad de la construcción, para esto la selección de los materiales para cada una de ellas, fue a partir de sus propiedades mecánicas.

La parte principal de todo el robot es la placa plastrón en la cual irán emperrados los dos soportes principales de cada subsistema, para esto se eligió el material ABS por sus propiedades mecánicas, su peso ligero y por su maquinabilidad.

Tabla 6. Datos técnicos del material ABS.

Alargamiento a la Rotura (%)	45
Coefficiente de Fricción	0,5
Módulo de Tracción (GPa)	2,1-2,4
Resistencia a la Tracción (MPa)	41-45
Resistencia al Impacto Izod (J m-1)	200-400
Densidad (g cm-3)	1,05
Resistencia a la fluencia (MPa)	35

Para las sujeciones de los servos y las uniones se utilizó servo bracket tipo C los cuales fueron seleccionados gracias a su peso ligero de una aleación de aluminio. La aleta y los eslabones también fueron fabricados a partir del material ABS cumpliendo las especificaciones mínimas del estudio de esfuerzo, el material elegido fue el por sus propiedades mecánicas.

4.2 DISEÑO ELECTRÓNICO

Finalizado el diseño mecánico y validado su funcionamiento, es necesario continuar con el diseño electrónico, el cual partirá con el análisis de fuerzas de empuje previamente realizado en el diseño mecánico, con datos esenciales para la correcta selección de actuadores capaces de suplir los requisitos previos. La etapa fundamental del diseño electrónico una vez seleccionado los actuadores, los sensores y la placa controladora es el suministro de energía necesaria para que el robot tenga una autonomía adecuada y el diseño de la interface de alimentación a cada actuador y la placa controladora.

4.2.1 SELECCIÓN DE ACTUADORES

El estudio de fuerzas realizado en el diseño mecánico otorgó el par del motor, las fuerzas de empuje y levantamiento necesario en cada articulación para realizar la locomoción.

Tabla 7. Datos técnicos micro servo motor 9g SG90.

Torque Máximo	1.8 kgf·cm² (4.8 V), 2.6 kgf·cm² (6 V)
Voltaje de operación	3 V a 7.2 V
Corriente de Consumo	100mA-120mA (6v)
Corriente Máxima	500mA
Velocidad de operación	0.10 s/60° (4.8 V), 0.7 s/60° (6 V)
Rango de temperatura	-30 °C – 60 °C

La selección de los actuadores se realizó a partir de este estudio con un factor de seguridad del 1.5 por lo que se escogió el servo motor SG90.

4.2.2 CÁLCULO DE CONSUMO DE CORRIENTE

A partir de los datos técnicos antes expuestos, se procedió a calcular la corriente de consumo de cada servomotor y de todo el robot.

Para obtener la corriente de consumo de cada servo es necesario obtener la constante de torque del motor la cual se calcula:

$$kt = \frac{Tm}{Im} \quad [12]$$

Donde:

Kt = Constante del torque del motor.

Tm =Torque máximo: tomado de la tabla 9.

Im =Corriente máxima.

$$kt = \frac{2.6 \text{ kgf} \cdot \text{cm}^2}{0.5A}$$
$$kt = 5,2 \frac{\text{kgf} \cdot \text{cm}^2}{A}$$

A partir de esta constante la cual indica cuanto torque es producido por amperio, calculamos la demanda de amperios de cada servomotor para producir el torque necesario antes calculado.

$$Ic = \frac{Ta}{Kt} \quad [13]$$

Donde:

Kt = Constante de torque de motor.

Ta =Torque demandado.

Ic =Corriente necesaria.

m = Momento generado en la cola = 0.0069 Nm

D = distancia = 0.0120 m

Para obtener el torque en la cola necesitaremos el momento (m) y la D (distancia desde donde se genera el momento a donde actúa el torque)

$$Ta = m * D$$
$$Ta = 0.069 \text{ Nm} * 0.0120 \text{ m}$$
$$Ta = 8.44 * 10^{-5} \text{ kgf} * \text{cm}^2$$

Se puede señalar que el torque requerido por el prototipo es mucho menor al torque entregado por los servomotores ya que este es de $2.6 \text{ kgf} \cdot \text{cm}^2$.

$$Ic = \frac{8.44 * 10^{-9} \text{ kgf} * \text{cm}^2}{5,2 \text{ kgf} \cdot \text{cm}^2 / A} = 1.623 * 10^{-5} A$$

Tabla 8. Características Servomotor SG90

Torque	42.8 oz-inch 3 kg-cm
Velocidad	0.1 seg/60°
Peso	14.7.0 g
Dimensiones	Longitud 32 mm Ancho 12 mm Alto 32 mm
Tipo de motor	3-polos
Tipo de engranaje	Metálico

Teniendo en cuenta este valor del consumo de corriente se puede proceder en el diseño electrónico ya sea al escoger la batería o la conexión de los actuadores y sensores.

4.2.3 SELECCIÓN DE SENSORES

Para el funcionamiento óptimo del prototipo con respecto a su movimiento y por ende la validación del diseño mecánico es necesario usar un sensor ultrasónico HC-SR04 para controlar la trayectoria del pez (Astessiano, 2013).

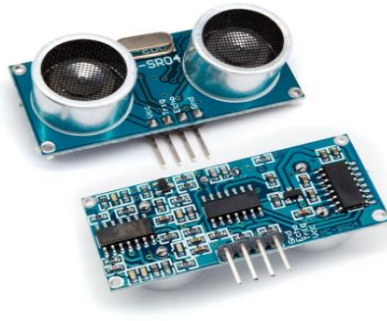


Figura 27. Sensor ultrasónico HC-SR04
(Davinia Font, 2013)

Según el datasheet del sensor la corriente necesaria para su funcionamiento es de 15 mA.

4.2.4 SELECCIÓN DE FUENTE DE ENERGIA

Para conseguir que el prototipo del pez robótico logre simular los patrones cíclicos de aleteo en locomoción, se decidió utilizar cuatro servos antes especificados. Con el cálculo de corriente de consumo de estos cuatro actuadores se procedió a la selección de la fuente de energía la cual entregará autonomía necesaria para su desplazamiento (Astessiano, 2013).

Tabla 9. Datos técnicos batería.

Tipo	Nickel Metal Hydride (NiMH)
Capacidad	5000 Mah
Voltaje	6v
Configuración	Paquete 5-celulas
Dimensiones	L: 67,8 mm A: 40,6 mm H: 45,7 mm
Peso	362.9 gr.
Consumo	5000 Mah

La baterías NIMH, recargable fue escogida por: su bajo impacto al medio ambiente, por su capacidad de carga la cual es hasta tres veces más que las NiCd, por sus ciclos de carga de esta pila los cuales oscila entre 500 y 2000 cargas; y principalmente

porque estas baterías se encuentran menos afectadas por el efecto memoria, en el que cada recarga se limita el voltaje o la capacidad (Astessiano, 2013).

4.2.5 DISEÑO INTERFAZ

El diseño electrónico culmina con la etapa de diseño de la interfaz, dado que se tiene todos los actuadores y los controladores dimensionados. Para la interfaz se procedió a utilizar el software Proteus, el cual facilita la esquematización.

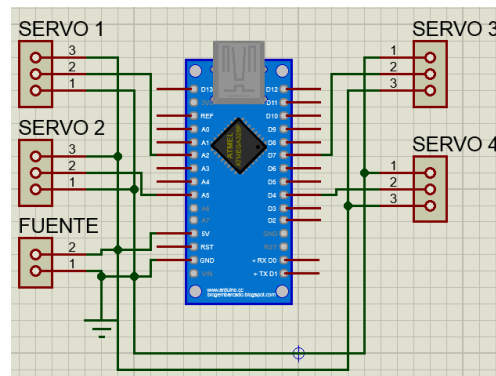


Figura 28. Esquemática de la conexión.

En la figura 28 se ve como se conecta los actuadores a la placa de Arduino ya que esta tiene la capacidad de suministrar el suficiente voltaje, por seguridad para que todos los actuadores tengan la suficiente potencia para su trabajo se utiliza un transistor parecido a un puente H.

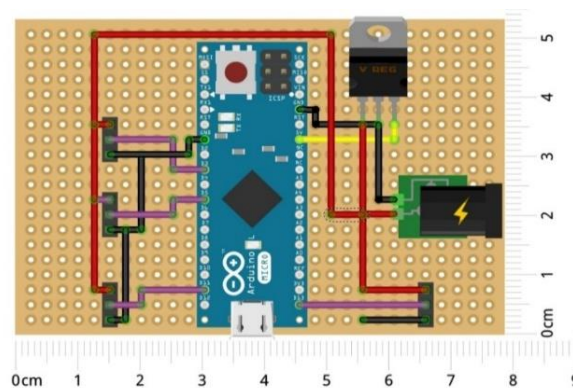


Figura 29. Placa de conexión

A partir de la finalización del esquema de conexión se puede diseñar la placa y sus conexiones, para conocer sus dimensiones y su distribución.

5. ANALISIS DE RESULTADOS

Después de la integración se realizó la evaluación de los mismos mediante simulaciones y pruebas, del movimiento del prototipo de un pez, así como el funcionamiento de la parte electrónica con la de control.

La comprobación es con respecto al movimiento del prototipo en si la ondulación cíclica del pez y la curvatura en L y en U, logrado tanto por el diseño mecánico, como electrónico mediante el uso de actuadores como los servomotores y el sensor ultrasónico que permitió realizar un programa capaz de cumplir los requerimientos del sistema.

5.1. IMPLEMENTACIÓN DEL SISTEMA

La impresión del prototipo se realizó usando medidas estándares sobre todo por la utilización de los servos, sensores, placa y batería.

Se debe tomar en cuenta que la implementación del sistema contempla los diferentes aspectos de la ingeniería mecatrónica, por ello la necesidad de un diseño en paralelo.

5.2. PRUEBAS DE VALIDACIÓN

Batería

Al realizar las pruebas del sistema se debe comprobar la duración de la batería, para poder determinar el tiempo que el prototipo podrá estar en el agua.

El consumo de la parte eléctrica del prototipo es de 2120 mA dado por los actuadores, sensores y placa.

$$\text{Tiempo de descarga} = \frac{\text{Carga electrica bateria}}{\text{consumo electrico dispositivo}}$$

$$\text{Tiempo de descarga} = \frac{5000 \text{ mAh}}{2120 \text{ mA}}$$

$$\text{Tiempo de descarga} = 2.36 \text{ h}$$

La batería dura 2 hora y 36 minutos a 2120 mA fuera del agua, este tiempo de duración está determinado por el consumo de todo el prototipo, es decir, servomotores, sensores y placa.

Sensor

Se realizó algunas mediciones del tiempo de respuesta del sensor, así tener una idea más acertada del tiempo que se demora el prototipo en girar.

Como se muestra en la tabla 11 (estos valores son tomados del monitor serial de Arduino) el tiempo que necesita para recibir la reacción y por ende enviar el impulso para realizar la acción depende de la distancia del objeto.

Tabla 10. Medición del sensor fuera del agua

10 cm	294.11 us
15 cm	441.17us
12 cm	352.94 us
9 cm	264.70 us
5 cm	147.05 us
4 cm	117.64 us
20 cm	133.33 us

Como demuestran los datos el tiempo medido de reacción es muy rápida en menos de un segundo sin importar la distancia.

Como el prototipo deberá estar dentro del agua por seguridad para evitar cualquier coalición se determinará una distancia de 20 cm, así sabemos que el tiempo de respuesta del sensor fuera del agua es de 133.33 us (este valor es tomado del monitor serial de Arduino).

5.3 MOVIMIENTO

Para la validación del programa tanto con respecto a la utilización de ciertas posiciones para los diferentes tipos de movimiento, así como la respuesta del sensor ultrasónico se realizó la calibración más exacta, sin embargo, la programación en arduino permite la simulación en tiempo real, así como la facilidad de corrección en el programa.

Con los actuadores seleccionados para el movimiento del prototipo no hubo problemas en cuanto a la generación del torque necesario para realizar la onda cíclica, la curvatura en L y la curvatura en U, así como la fuerza necesaria en la cola para tener la suficiente propulsión para el prototipo.

Con respecto al movimiento el prototipo debe cumplir la onda cíclica de un pez en modo crucero tal como se muestra en la figura 30, la cual se realiza de la manera más cercana al real considerando el tamaño del pez, logrado por la programación para la señal PWM de los servos realizando una escala en base a los ángulos adecuados de los eslabones.

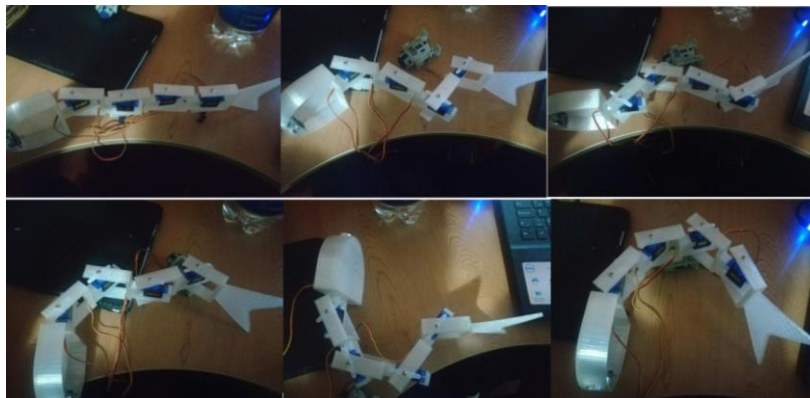


Figura 30. Movimiento cíclico del pez

En las figuras 31,33 y 35, se muestra la diferencia entre la medición del movimiento real de una trucha con la del prototipo, es decir que bajo la misma posición se compara los ángulos que forman ambos y en base a esa diferencia se obtiene el error absoluto y el error relativo del prototipo con respecto a una trucha real.

Los valores de error absoluto y error relativo están determinados mediante la comparación de los diferentes ángulos formados al moverse el prototipo con respecto a una trucha real, estos ángulos oscilan desde el punto de reposo que es cero a una variación entre 90° en el caso de la curva en L y de 60° en la curvatura en U, también

se debe mencionar la oscilación desde el punto de inicio 0 a una variación de 30° en el movimiento oscilatorio.

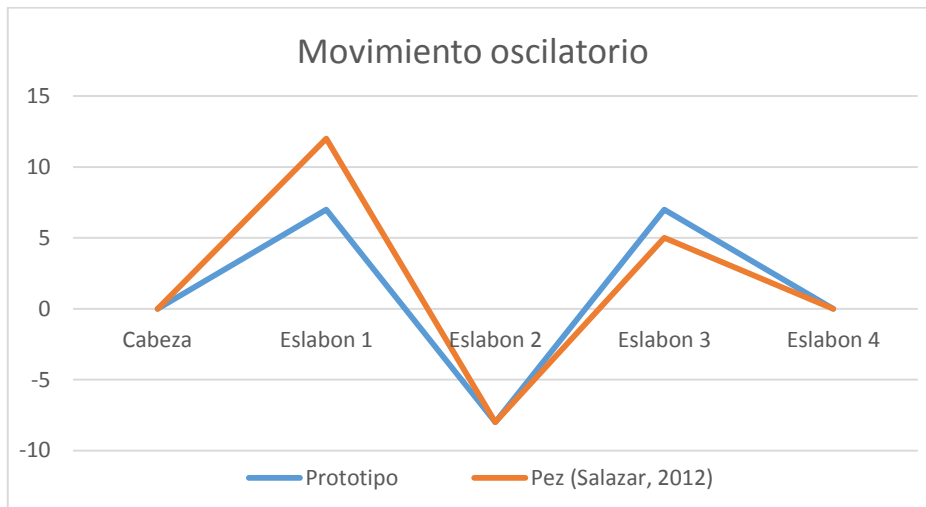


Figura 31. Movimiento oscilatorio

Error absoluto = 3%

Error relativo= 42%

Como se puede observar el error absoluto del sistema no es mayor a 3% lo que demuestra que el trabajo de cada eslabón es bastante aproximado al real sin embargo el error relativo del sistema es del 42%.

La curvatura en L ya sea para la izquierda o para la derecha como se muestra en la figura 32, mediante la variación de los primeros servos, principalmente de la cabeza, cambian su rutina de movimiento gracias a la señal del sensor ultrasónico.



Figura 32. Curvatura en L del prototipo

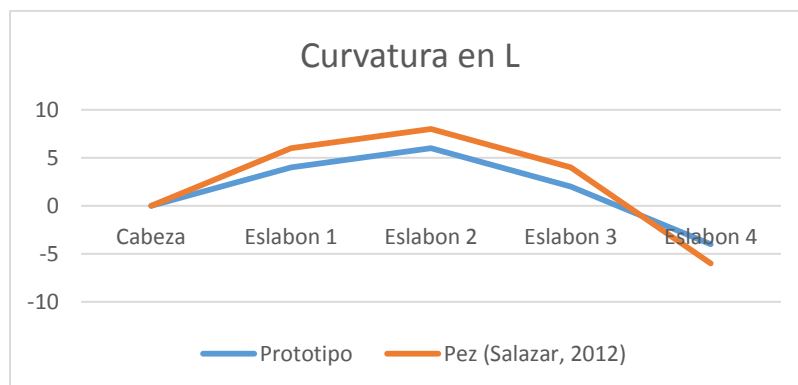


Figura 33. Movimiento oscilatorio en L

Error absoluto = 4%
Error relativo= 36.11%

La curvatura en U mostrada en la figura 34, básicamente los servos que se encuentran en la mitad permiten realizar la posición, mientras la cabeza selecciona la dirección en respuesta a la señal del sensor ultrasónico, la cola mantiene el impulso.

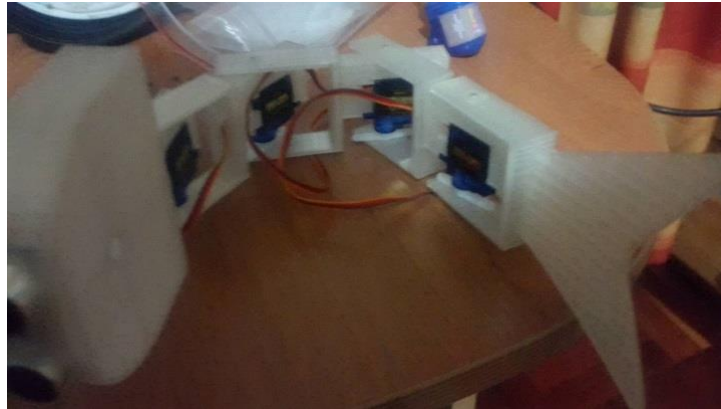


Figura 34. Curvatura en U del prototipo

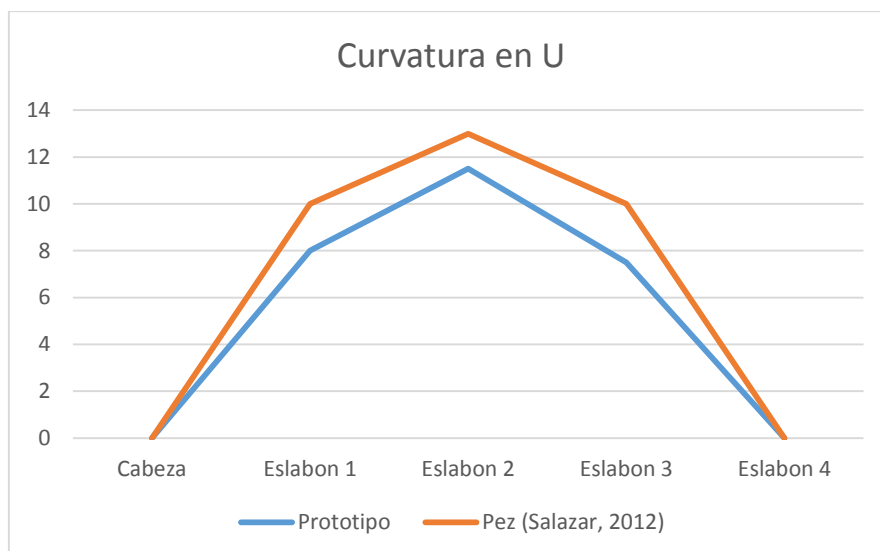


Figura 35. Movimiento oscilatorio en U

Error absoluto = 6%
Error relativo= 22.5%

Como se muestra en la figura 35 el prototipo no logra asemejar a la perfección el movimiento de un pez, una trucha del mismo peso, sin embargo, al analizar el movimiento del prototipo en su onda oscilatoria el error absoluto es muy pequeño, lo que muestra que el modelo matemático que los errores son aceptables y que el movimiento, con cierto error, cumple con el movimiento real del pez

6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES

En el diseño y desarrollo del prototipo cada parte contribuyó a que este lograra el movimiento de un pez, tanto la parte mecánica, la electrónica y de control, los servomotores al ser actuadores controlados por una señal PWM permitió realizar una simulación adecuada del movimiento de la aleta, además del diseño mecánico permitió describir las ondulaciones del aleteo.

- El sistema mecánico en si permite la simulación del ciclo de ondulación desde la cabeza hasta la aleta de un pez compuesto por 3 eslabones y la cola en si 4 eslabones. Esto permite que el uso adecuado de los actuadores con respecto al torque que entregan permita tener la fuerza de propulsión requerida por el prototipo
- El proyecto respeta los rasgos físicos con respecto al movimiento y medidas del pez, ya que al utilizar 4 eslabones hay mayor flexibilidad del prototipo y en cuanto a las medidas se trató en lo más posible de acercarse a la realidad en la relación peso y longitud de un pez real sin embargo estéticamente se nota ser un prototipo robótico.
- Con respecto a la evasión de objetos se consideró para el diseño dos formas de curvar en L y en U, en L en caso de que algo no permita al pez seguir adelante y tampoco seguir por el lado derecho, de igual manera por el lado izquierdo y cuando no haya opción por ninguno de los dos realizar el movimiento en U, para esto no se consideró la velocidad del pez ya que en el caso de las truchas son capaces de realizar estos giros a cualquier velocidad.
- Sin duda fue necesario mantener una sinergia entre el desarrollo mecánico, electrónico y de control, ya que al tratarse de simular el movimiento del pez estos tres aspectos fueron fundamentales, es decir, se complementaron para lograr el desarrollo adecuado del proyecto.

RECOMENDACIONES

A medida que se realizó este trabajo de titulación basado en el desarrollo de un prototipo se encontraron varios retos y dificultades superadas dependiendo del punto de vista del autor, sin embargo, al ser un prototipo este puede mejorarse.

- Para tener mayor semejanza del prototipo a un pez real, se podría usar un material de recubrimiento como silicona para que los movimientos de este no sean tan robóticos, además de sus propiedades mecánicas.

- La secuencia del movimiento fue un reto ya que el pez al realizar la propulsión con la aleta restablece el equilibrio con la cabeza por ende el movimiento no se lo podía considerar individualmente por cada eslabón sino del sistema completo.
- En la parte del diseño del prototipo se consideraron opciones más fáciles de desarrollar sobre todo por los soportes y los acoples de los servos, pero para el modelado se le considero como eslabones.
- Al momento de transferir el programa a la placa Arduino ya sea porque se actualizo o realizo cambios se debe hacer con la fuente de alimentación apagada para evitar daños en el sistema mecánico, debido a que cada motor tiene movilidad restringida y eso puede ocasionar rotura de algunos elementos del prototipo.
- Se podría considerar la utilización de más sensores de proximidad para reducir el riesgo de algún daño en el prototipo, y mejorar el desfase de reacción de este.

Bibliografía

- Agassiz. (2013). Obtenido de <http://www.pasapues.es/naturalezadearagon/historianatural/zoologia-peces.php>
- ARDUINO CC. (2015). Recuperado el 20 de 02 de 2015, de Arduino Micro: <http://arduino.cc/en/Main/arduinoBoardMicro>
- Astessiano, D. (2013). Proyecto pez robot. Mexico D.F.
- Baturone, A. O. (2013). Robótica: manipuladores y robots móviles. Barcelona: Marcobo.
- Berrendi, A. (21 de 04 de 2013). Quimica inorganica. Obtenido de <http://www.fullquimica.com/2012/04/densidad-del-agua.html>
- BioEnciclopedia. (2015). Obtenido de Tortuga Marina: <http://bioenciclopedia.com/tortuga-marina/>
- C. Ross Ethier, C. A. (2014). Introductory Biomechanics: From Cells to Organisms. Cambridge: Cambridge University Press.
- Carlos, N. (2014). Todo sobre peces peces. Recuperado el 20 de 09 de 2015, de https://6d5a7016d95b9cf5a8c0bf8be14cee5d6e81188c.googledrive.com/host/0BzqCqv2AwL5MMWxnbEE1eEtGc2M/cmo_se_desplazan_los_peces.html
- Davinia Font, M. T. (12 de 11 de 2013). Sensors. Recuperado el 09 de 02 de 2015, de <http://www.mdpi.com/1424-8220/11/12/11168/htm>
- Deutshcher, I. V. (2013). diseno mecatronica.
- Devdas Sheety, R. A. (2014). Mechatronics System Design. Stamford: CENGAGE Learning.
- Dibujos imagenes biologia y mas. (21 de Octubre de 2013). Recuperado el 22 de Septiembre de 2014, de <http://biologiafotosdibujosimagenes.blogspot.com/2011/10/lobulos-del-cerebro-humano.html>
- Duran, M. (18 de 08 de 2015). mailxmail. Obtenido de <http://www.mailxmail.com/curso-manual-pesca-andalucia-tarjeta-identificacion-pescador/caracteristicas-generales-peces-forma-anatomia-externa>
- Garcia, J. d. (10 de 2015). cubierta 3. Obtenido de http://ruc.udc.es/bitstream/2183/7343/2/RodriguezGarcia_JuandeDios_TD_2010_01de2.pdf
- Gutiérrez, M. A. (2015). Biomecánica: la física y la fisiología. Madrid: CSIC.
- Gutierrez, M. A. (05 de 08 de 2015). ebook. Obtenido de https://books.google.com.ec/books?id=k3nPlvZnY7gC&pg=PA198&lpg=PA198&dq=biomecanica+del+pez&source=bl&ots=S4XFJs_NVC&sig=Yd5n7Kf2p6rUuU-gFcxPX6V28_o&hl=es&sa=X&redir_esc=y#v=onepage&q=biomecanica%20del%20pez&f=false
- Herrera, L. (2013). Anatomia y estructura de las truchas. Recuperado el mayo de 2016, de <http://www.pescaleon.com/download.php3?fichero=./docs/anatomia.pdf.com>

- HuoshengHu, J. (2015). Diseño de patrones de nado 3D para robóts acuaticos y de superficies blandas autónomos. Conferencia internacional de robots y sistemas inteligentes, (pág. 2 y 3). Beijing.
- Huston, R. L. (2015). Principles of Biomechanics. London: CRC Press.
- IndoHeli. (2013). Recuperado el 20 de 02 de 2015, de TowerPro: http://www.indoheli.com/towerpro-mg90s-metal-gear-micro-servo.html#.VOeH__m-9ic
- Jacko, J. A. (2013). Human-Computer Interaction. Orlando: Springer Science & Business Media.
- Joseph Hamill, K. M. (2015). Biomechanical Basis of Human Movement. Baltimore: Lippincott Williams & Wilkins.
- Knudson, D. (2015). Fundamentals of Biomechanics. Chico: Springer Science & Business Media.
- Lozoya, J. (06 de Julio de 2013). Suite101. Recuperado el 03 de Febrero de 2015, de Naturalez y Animales: <http://suite101.net/article/reptiles-caracteristicas-tipos-reproduccion-y-clasificacion-a83038#.VNE3qWi-9ic>
- Marquez, R. (2016). LAS TORTUGAS MARINAS Y NUESTRO TIEMPO. Mexico D.F.: D.R.
- Miller, C. H. (2014). Digital Storytelling. Burlington: Focas Press.
- Mott, R. L. (2013). Diseño de elemenos de maquinas. Mexico: PEARSON.
- Nihat Özkaya, M. N. (2013). Fundamentals of Biomechanics: Equilibrium, Motion, and Deformation. New York: Springer Science & Business Media.
- Noriega, C. (2013). informacion sobre animales. Obtenido de <http://www.infoanimales.com/informacion-sobre-la-trucha-comun>
- Peter L. Lutz, J. A. (2013). The Biology of Sea Turtles. Boca Raton: CRC Press.
- Popovic, M. B. (2013). Biomechanics and Robotics. Boca Raton: CRC Press.
- Rios, S. (2016). Modelizacion. España: Alianza Universidad.
- Salazar, R. G. (2013). Diseño de un mecanismo de propulsion para un pez. DYNA, 40-60.
- Simbaña, R. (agosto de 2014). La trucha. Recuperado el agosto de 2016, de <http://www.botanical-online.com/animales/truchas.htm>
- solivan, G. (2016). uniovi. es. Recuperado el 11 de 2016, de <http://www6.uniovi.es/usr/fblanco/Leccion4.SeleccionTERMOPLASTICOS.pdf>
- Storyboard. (18 de Junio de 2013). The Walt Disney Museum. Recuperado el 11 de 02 de 2015, de The Early Days of Audio-Animatronics: <http://www.waltdisney.org/storyboard/early-days-audio-animatronics%C2%A9>
- Trejo, M. H. (2014). CIATEC. Recuperado el 02 de febrero de 2015, de Biomecanica : <http://www.ciatec.mx/laboratorios/biomecanica/>
- Triana, J. C. (2015). Universidad de los Andes Colombia. Recuperado el 02 de febrero de 2015, de Departamento de Ingenieria Biomedica: <https://ingbiomedica.uniandes.edu.co/index.php/departamento/areas-departamento/biomecanica>

Victor. (2013). UNAM. Recuperado el 05 de Febrero de 2015, de MATCUER:
http://www.matcuer.unam.mx/~victor/Sistemas/modelado_sistemas_dinamicos.pdf

Wyneken, J. (Mayo de 2015). SEFSC. Recuperado el 03 de Febrero de 2015, de La anatomía de las tortugas marinas:
http://www.sefsc.noaa.gov/turtles/TM_470_Wyneken_spanish.pdf

ANEXOS

ANEXO I

MODELO DINÁMICO DEL PEZ AUTÓNOMO

$$T = \left(m4 \times (L1 \times \dot{\theta}1 \times \cos(\theta1) + L2 \times \dot{\theta}2 \times \cos(\theta2) + L3 \times \dot{\theta}3 \times \cos(\theta3) + L4 \times \dot{\theta}4 \times \cos(\theta4) + L1 \times \dot{\theta}1 \times \sin(\theta1) + L2 \times \dot{\theta}2 \times \sin(\theta2) + L3 \times \dot{\theta}3 \times \sin(\theta3) + L4 \times \dot{\theta}4 \times \sin(\theta4))^2 \right) \times \frac{1}{2} + \left(m1 \times (L1 \times \dot{\theta}1 \times \cos(\theta1) + L1 \times \dot{\theta}1 \times \sin(\theta1))^2 \right) \times \frac{1}{2} + \left(I2 \times (\dot{\theta}1 + \dot{\theta}2)^2 \right) \times \frac{1}{2} + \left(m3 \times (L1 \times \dot{\theta}1 \times \cos(\theta1) + L2 \times \dot{\theta}2 \times \cos(\theta2) + L3 \times \dot{\theta}3 \times \cos(\theta3) + L1 \times \dot{\theta}1 \times \sin(\theta1) + L2 \times \dot{\theta}2 \times \sin(\theta2) + L3 \times \dot{\theta}3 \times \sin(\theta3))^2 \right) \times \frac{1}{2} + (I1 \times \dot{\theta}1^2) \times \frac{1}{2} + \left(I3 \times (\dot{\theta}1 + \dot{\theta}2 + \dot{\theta}3)^2 \right) \times \frac{1}{2} + \left(m2 \times (L1 \times \dot{\theta}1 \times \cos(\theta1) + L2 \times \dot{\theta}2 \times \cos(\theta2) + L1 \times \dot{\theta}1 \times \sin(\theta1) + L2 \times \dot{\theta}2 \times \sin(\theta2))^2 \right) \times \frac{1}{2} + \left(I4 \times (\dot{\theta}1 + \dot{\theta}2 + \dot{\theta}3 + \dot{\theta}4)^2 \right) \times \frac{1}{2}$$

$$U = -g \times m4 \times (L1 \times \cos(\theta1) + L2 \times \cos(\theta2) + L3 \times \cos(\theta3) + L4 \times \cos(\theta4)) - g \times m2 \times (L1 \times \cos(\theta1) + L2 \times \cos(\theta2)) - g \times m3 \times (L1 \times \cos(\theta1) + L2 \times \cos(\theta2) + L3 \times \cos(\theta3)) - L1 \times g \times m1 \times \cos(\theta1)$$

$$L = T - U$$

$$L = \left(m4 \times (L1 \times \dot{\theta}1 \times \cos(\theta1) + L2 \times \dot{\theta}2 \times \cos(\theta2) + L3 \times \dot{\theta}3 \times \cos(\theta3) + L4 \times \dot{\theta}4 \times \cos(\theta4) + L1 \times \dot{\theta}1 \times \sin(\theta1) + L2 \times \dot{\theta}2 \times \sin(\theta2) + L3 \times \dot{\theta}3 \times \sin(\theta3) + L4 \times \dot{\theta}4 \times \sin(\theta4))^2 \right) \times \frac{1}{2} + \left(m1 \times (L1 \times \dot{\theta}1 \times \cos(\theta1) + L1 \times \dot{\theta}1 \times \sin(\theta1))^2 \right) \times \frac{1}{2} + \left(I2 \times (\dot{\theta}1 + \dot{\theta}2)^2 \right) \times \frac{1}{2} + \left(m3 \times (L1 \times \dot{\theta}1 \times \cos(\theta1) + L2 \times \dot{\theta}2 \times \cos(\theta2) + L3 \times \dot{\theta}3 \times \cos(\theta3) + L1 \times \dot{\theta}1 \times \sin(\theta1) + L2 \times \dot{\theta}2 \times \sin(\theta2) + L3 \times \dot{\theta}3 \times \sin(\theta3))^2 \right) \times \frac{1}{2} + (I1 \times \dot{\theta}1^2) \times \frac{1}{2} + \left(I3 \times (\dot{\theta}1 + \dot{\theta}2 + \dot{\theta}3)^2 \right) \times \frac{1}{2} + \left(m2 \times (L1 \times \dot{\theta}1 \times \cos(\theta1) + L2 \times \dot{\theta}2 \times \cos(\theta2) + L1 \times \dot{\theta}1 \times \sin(\theta1) + L2 \times \dot{\theta}2 \times \sin(\theta2))^2 \right) \times \frac{1}{2} + \left(I4 \times (\dot{\theta}1 + \dot{\theta}2 + \dot{\theta}3 + \dot{\theta}4)^2 \right) \times \frac{1}{2} + g \times m4 \times (L1 \times \cos(\theta1) + L2 \times \cos(\theta2) + L3 \times \cos(\theta3) + L4 \times \cos(\theta4)) + g \times m2 \times (L1 \times \cos(\theta1) + L2 \times \cos(\theta2)) + g \times m3 \times (L1 \times \cos(\theta1) + L2 \times \cos(\theta2) + L3 \times \cos(\theta3)) + L1 \times g \times m1 \times \cos(\theta1)$$

>> *expand(L)*

$$L = (I1 * \dot{\theta}1^2)/2 + (I2 * \dot{\theta}1^2)/2 + (I2 * \dot{\theta}2^2)/2 + (I3 * \dot{\theta}1^2)/2 + (I3 * \dot{\theta}2^2)/2 + (I4 * \dot{\theta}1^2)/2 + (I3 * \dot{\theta}3^2)/2 + (I4 * \dot{\theta}2^2)/2 + (I4 * \dot{\theta}3^2)/2 + (I4 * \dot{\theta}4^2)/2 + I2 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}2 + I3 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}2 + I3 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}3 + I4 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}2 + I3 * \dot{\theta}2 * \dot{\theta}3 + I4 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}3 + I4 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}4 + I4 * \dot{\theta}2 * \dot{\theta}3 + I4 * \dot{\theta}2 * \dot{\theta}4 + I4 * \dot{\theta}3 * \dot{\theta}4 + L1 * g * m1 * \cos(\theta1) + L1 * g * m2 * \cos(\theta1) + L1 * g * m3 * \cos(\theta1) + L1 * g * m4 * \cos(\theta1) + L2 * g * m2 * \cos(\theta2) + L2 * g * m3 * \cos(\theta2) + L2 * g * m4 * \cos(\theta2) + L3 * g * m3 * \cos(\theta3) + L3 * g * m4 * \cos(\theta3) + L4 * g * m4 * \cos(\theta4) + (L1^2 * \dot{\theta}1^2 * m1 * \cos(\theta1)^2)/2 + (L1^2 * \dot{\theta}1^2 * m2 * \cos(\theta1)^2)/2 + (L1^2 * \dot{\theta}1^2 * m3 * \cos(\theta1)^2)/2 + (L1^2 * \dot{\theta}1^2 * m4 * \cos(\theta1)^2)/2 + (L2^2 * \dot{\theta}2^2 * m2 * \cos(\theta2)^2)/2 + (L2^2 * \dot{\theta}2^2 * m3 * \cos(\theta2)^2)/2 +$$

$$\begin{aligned}
& (L2^2 * \dot{\theta}2^2 * m4 * \cos(\theta2)^2)/2 + (L3^2 * \dot{\theta}3^2 * m3 * \cos(\theta3)^2)/2 + (L3^2 * \dot{\theta}3^2 * \\
& m4 * \cos(\theta3)^2)/2 + (L4^2 * \dot{\theta}4^2 * m4 * \cos(\theta4)^2)/2 + (L1^2 * \dot{\theta}1^2 * m1 * \\
& \sin(\theta1)^2)/2 + (L1^2 * \dot{\theta}1^2 * m2 * \sin(\theta1)^2)/2 + (L1^2 * \dot{\theta}1^2 * m3 * \sin(\theta1)^2)/2 + \\
& (L1^2 * \dot{\theta}1^2 * m4 * \sin(\theta1)^2)/2 + (L2^2 * \dot{\theta}2^2 * m2 * \sin(\theta2)^2)/2 + (L2^2 * \dot{\theta}2^2 * \\
& m3 * \sin(\theta2)^2)/2 + (L2^2 * \dot{\theta}2^2 * m4 * \sin(\theta2)^2)/2 + (L3^2 * \dot{\theta}3^2 * m3 * \\
& \sin(\theta3)^2)/2 + (L3^2 * \dot{\theta}3^2 * m4 * \sin(\theta3)^2)/2 + (L4^2 * \dot{\theta}4^2 * m4 * \sin(\theta4)^2)/2 + \\
& L1^2 * \dot{\theta}1^2 * m1 * \cos(\theta1) * \sin(\theta1) + L1^2 * \dot{\theta}1^2 * m2 * \cos(\theta1) * \sin(\theta1) + L1^2 * \\
& \dot{\theta}1^2 * m3 * \cos(\theta1) * \sin(\theta1) + L1^2 * \dot{\theta}1^2 * m4 * \cos(\theta1) * \sin(\theta1) + L2^2 * \dot{\theta}2^2 * \\
& m2 * \cos(\theta2) * \sin(\theta2) + L2^2 * \dot{\theta}2^2 * m3 * \cos(\theta2) * \sin(\theta2) + L2^2 * \dot{\theta}2^2 * m4 * \\
& \cos(\theta2) * \sin(\theta2) + L3^2 * \dot{\theta}3^2 * m3 * \cos(\theta3) * \sin(\theta3) + L3^2 * \dot{\theta}3^2 * m4 * \cos(\theta3) * \\
& \sin(\theta3) + L4^2 * \dot{\theta}4^2 * m4 * \cos(\theta4) * \sin(\theta4) + L1 * L2 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}2 * m2 * \cos(\theta1) * \\
& \cos(\theta2) + L1 * L2 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}2 * m3 * \cos(\theta1) * \cos(\theta2) + L1 * L2 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}2 * m4 * \cos(\theta1) * \\
& \cos(\theta2) + L1 * L3 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}3 * m3 * \cos(\theta1) * \cos(\theta3) + L1 * L3 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}3 * m4 * \cos(\theta1) * \\
& \cos(\theta3) + L2 * L3 * \dot{\theta}2 * \dot{\theta}3 * m3 * \cos(\theta2) * \cos(\theta3) + L1 * L4 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}4 * m4 * \cos(\theta1) * \\
& \cos(\theta4) + L2 * L3 * \dot{\theta}2 * \dot{\theta}3 * m4 * \cos(\theta2) * \cos(\theta3) + L2 * L4 * \dot{\theta}2 * \dot{\theta}4 * m4 * \cos(\theta2) * \\
& \cos(\theta4) + L3 * L4 * \dot{\theta}3 * \dot{\theta}4 * m4 * \cos(\theta3) * \cos(\theta4) + L1 * L2 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}2 * m2 * \cos(\theta1) * \\
& \sin(\theta2) + L1 * L2 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}2 * m2 * \cos(\theta2) * \sin(\theta1) + L1 * L2 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}2 * m3 * \cos(\theta1) * \\
& \sin(\theta2) + L1 * L2 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}2 * m3 * \cos(\theta2) * \sin(\theta1) + L1 * L2 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}2 * m4 * \cos(\theta1) * \\
& \sin(\theta2) + L1 * L2 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}2 * m4 * \cos(\theta2) * \sin(\theta1) + L1 * L3 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}3 * m3 * \cos(\theta1) * \\
& \sin(\theta3) + L1 * L3 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}3 * m3 * \cos(\theta3) * \sin(\theta1) + L1 * L3 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}3 * m4 * \cos(\theta1) * \\
& \sin(\theta3) + L1 * L3 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}3 * m4 * \cos(\theta3) * \sin(\theta1) + L2 * L3 * \dot{\theta}2 * \dot{\theta}3 * m3 * \cos(\theta2) * \\
& \sin(\theta3) + L2 * L3 * \dot{\theta}2 * \dot{\theta}3 * m3 * \cos(\theta3) * \sin(\theta2) + L1 * L4 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}4 * m4 * \cos(\theta1) * \\
& \sin(\theta4) + L1 * L4 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}4 * m4 * \cos(\theta4) * \sin(\theta1) + L2 * L3 * \dot{\theta}2 * \dot{\theta}3 * m4 * \cos(\theta2) * \\
& \sin(\theta3) + L2 * L3 * \dot{\theta}2 * \dot{\theta}3 * m4 * \cos(\theta3) * \sin(\theta2) + L2 * L4 * \dot{\theta}2 * \dot{\theta}4 * m4 * \cos(\theta2) * \\
& \sin(\theta4) + L2 * L4 * \dot{\theta}2 * \dot{\theta}4 * m4 * \cos(\theta4) * \sin(\theta2) + L3 * L4 * \dot{\theta}3 * \dot{\theta}4 * m4 * \cos(\theta3) * \\
& \sin(\theta4) + L3 * L4 * \dot{\theta}3 * \dot{\theta}4 * m4 * \cos(\theta4) * \sin(\theta3) + L1 * L2 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}2 * m2 * \sin(\theta1) * \\
& \sin(\theta2) + L1 * L2 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}2 * m3 * \sin(\theta1) * \sin(\theta2) + L1 * L2 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}2 * m4 * \sin(\theta1) * \\
& \sin(\theta2) + L1 * L3 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}3 * m3 * \sin(\theta1) * \sin(\theta3) + L1 * L3 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}3 * m4 * \sin(\theta1) * \\
& \sin(\theta3) + L2 * L3 * \dot{\theta}2 * \dot{\theta}3 * m3 * \sin(\theta2) * \sin(\theta3) + L1 * L4 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}4 * m4 * \sin(\theta1) * \\
& \sin(\theta4) + L2 * L3 * \dot{\theta}2 * \dot{\theta}3 * m4 * \sin(\theta2) * \sin(\theta3) + L2 * L4 * \dot{\theta}2 * \dot{\theta}4 * m4 * \sin(\theta2) * \\
& \sin(\theta4) + L3 * L4 * \dot{\theta}3 * \dot{\theta}4 * m4 * \sin(\theta3) * \sin(\theta4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \gg \frac{dL}{d\theta1} = \\
& -L1 * g * m1 * \sin(\theta1) * \dot{\theta}1 + (-L1 * g * m2 * \sin(\theta1) * \dot{\theta}1) + (-L1 * g * m3 * \sin(\theta1) * \\
& \dot{\theta}1) + (-L1 * g * m4 * \sin(\theta1) * \dot{\theta}1) + \left((L1^2 * \dot{\theta}1^2 * m1 * 2 * -\sin(\theta1) * \dot{\theta}1) * \frac{1}{2} \right) + \\
& \left((L1^2 * \dot{\theta}1^2 * m2 * 2 * -\sin(\theta1) * \dot{\theta}1) * \frac{1}{2} \right) + (L1^2 * \dot{\theta}1^2 * m3 * -\sin(\theta1) * 2 * \dot{\theta}1) * \frac{1}{2} + \\
& (L1^2 * \dot{\theta}1^2 * m4 * -\sin(\theta1) * 2 * \dot{\theta}1) * \frac{1}{2} + (L1^2 * \dot{\theta}1^2 * m1 * \cos(\theta1) * 2 * \dot{\theta}1) * \frac{1}{2} + \\
& (L1^2 * \dot{\theta}1^2 * m2 * \cos(\theta1) * 2 * \dot{\theta}1) * \frac{1}{2} + (L1^2 * \dot{\theta}1^2 * m3 * \cos(\theta1) * 2 * \dot{\theta}1) * \frac{1}{2} + \\
& (L1^2 * \dot{\theta}1^2 * m4 * \cos(\theta1) * 2 * \dot{\theta}1) * \frac{1}{2} + L1^2 * \dot{\theta}1^2 * m1 * \left((\cos(\theta1)^2) * \dot{\theta}1 - (\sin(\theta1))^2 * \right. \\
& \left. \dot{\theta}1 \right) + L1^2 * \dot{\theta}1^2 * m2 * \left((\cos(\theta1)^2) * \dot{\theta}1 - (\sin(\theta1))^2 * \dot{\theta}1 \right) + L1^2 * \dot{\theta}1^2 * m3 * \\
& \left((\cos(\theta1)^2) * \dot{\theta}1 - (\sin(\theta1))^2 * \dot{\theta}1 \right) + L1^2 * \dot{\theta}1^2 * m4 * \left((\cos(\theta1)^2) * \dot{\theta}1 - (\sin(\theta1))^2 * \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& m4 + L1^2 * \dot{\theta}1 * m1 * \sin(2 * \theta1) + L1^2 * \dot{\theta}1 * m2 * \sin(2 * \theta1) + L1^2 * \dot{\theta}1 * m3 * \\
& \sin(2 * \theta1) + L1^2 * \dot{\theta}1 * m4 * \sin(2 * \theta1) + L1 * L2 * \dot{\theta}2 * m2 * \sin(\theta1 + \theta2) + L1 * L2 * \\
& \dot{\theta}2 * m3 * \sin(\theta1 + \theta2) + L1 * L2 * \dot{\theta}2 * m4 * \sin(\theta1 + \theta2) + L1 * L3 * \dot{\theta}3 * m3 * \\
& \sin(\theta1 + \theta3) + L1 * L3 * \dot{\theta}3 * m4 * \sin(\theta1 + \theta3) + L1 * L4 * \dot{\theta}4 * m4 * \sin(\theta1 + \theta4) + \\
& L1 * L2 * \dot{\theta}2 * m2 * \cos(\theta1 - \theta2) + L1 * L2 * \dot{\theta}2 * m3 * \cos(\theta1 - \theta2) + L1 * L2 * \dot{\theta}2 * \\
& m4 * \cos(\theta1 - \theta2) + L1 * L3 * \dot{\theta}3 * m3 * \cos(\theta1 - \theta3) + L1 * L3 * \dot{\theta}3 * m4 * \cos(\theta1 - \\
& \theta3) + L1 * L4 * \dot{\theta}4 * m4 * \cos(\theta1 - \theta4) + L1^2 * \dot{\theta}1^3 * m1 * \sin(\theta1) + L1^2 * \dot{\theta}1^3 * \\
& m2 * \sin(\theta1) + L1^2 * \dot{\theta}1^3 * m3 * \sin(\theta1) + L1^2 * \dot{\theta}1^3 * m4 * \sin(\theta1) - L1^2 * \dot{\theta}1^2 * \\
& m1 * (\dot{\theta}1 * \cos(\theta1)^2 - \dot{\theta}1 * \sin(\theta1)^2) - L1^2 * \dot{\theta}1^2 * m2 * (\dot{\theta}1 * \cos(\theta1)^2 - \dot{\theta}1 * \\
& \sin(\theta1)^2) - L1^2 * \dot{\theta}1^2 * m3 * (\dot{\theta}1 * \cos(\theta1)^2 - \dot{\theta}1 * \sin(\theta1)^2) - L1^2 * \dot{\theta}1^2 * \\
& m4 * (\dot{\theta}1 * \cos(\theta1)^2 - \dot{\theta}1 * \sin(\theta1)^2) - L1^2 * \dot{\theta}1^3 * m1 * \cos(\theta1) - L1^2 * \dot{\theta}1^3 * \\
& m2 * \cos(\theta1) - L1^2 * \dot{\theta}1^3 * m3 * \cos(\theta1) - L1^2 * \dot{\theta}1^3 * m4 * \cos(\theta1) + L1 * \dot{\theta}1 * g * \\
& m1 * \sin(\theta1) + L1 * \dot{\theta}1 * g * m2 * \sin(\theta1) + L1 * \dot{\theta}1 * g * m3 * \sin(\theta1) + L1 * \dot{\theta}1 * g * \\
& m4 * \sin(\theta1) - L1 * L2 * \dot{\theta}1^2 * \dot{\theta}2 * m2 * \cos(\theta1) * \sin(\theta2) + L1 * L2 * \dot{\theta}1^2 * \dot{\theta}2 * m2 * \\
& \cos(\theta2) * \sin(\theta1) - L1 * L2 * \dot{\theta}1^2 * \dot{\theta}2 * m3 * \cos(\theta1) * \sin(\theta2) + L1 * L2 * \dot{\theta}1^2 * \dot{\theta}2 * \\
& m3 * \cos(\theta2) * \sin(\theta1) - L1 * L2 * \dot{\theta}1^2 * \dot{\theta}2 * m4 * \cos(\theta1) * \sin(\theta2) + L1 * L2 * \dot{\theta}1^2 * \\
& \dot{\theta}2 * m4 * \cos(\theta2) * \sin(\theta1) - L1 * L3 * \dot{\theta}1^2 * \dot{\theta}3 * m3 * \cos(\theta1) * \sin(\theta3) + L1 * L3 * \\
& \dot{\theta}1^2 * \dot{\theta}3 * m3 * \cos(\theta3) * \sin(\theta1) - L1 * L3 * \dot{\theta}1^2 * \dot{\theta}3 * m4 * \cos(\theta1) * \sin(\theta3) + L1 * \\
& L3 * \dot{\theta}1^2 * \dot{\theta}3 * m4 * \cos(\theta3) * \sin(\theta1) - L1 * L4 * \dot{\theta}1^2 * \dot{\theta}4 * m4 * \cos(\theta1) * \sin(\theta4) + \\
& L1 * L4 * \dot{\theta}1^2 * \dot{\theta}4 * m4 * \cos(\theta4) * \sin(\theta1) + L1 * L2 * \dot{\theta}1^2 * \dot{\theta}2 * m2 * \sin(\theta1) * \\
& \sin(\theta2) + L1 * L2 * \dot{\theta}1^2 * \dot{\theta}2 * m3 * \sin(\theta1) * \sin(\theta2) + L1 * L2 * \dot{\theta}1^2 * \dot{\theta}2 * m4 * \\
& \sin(\theta1) * \sin(\theta2) + L1 * L3 * \dot{\theta}1^2 * \dot{\theta}3 * m3 * \sin(\theta1) * \sin(\theta3) + L1 * L3 * \dot{\theta}1^2 * \dot{\theta}3 * \\
& m4 * \sin(\theta1) * \sin(\theta3) + L1 * L4 * \dot{\theta}1^2 * \dot{\theta}4 * m4 * \sin(\theta1) * \sin(\theta4) - L1 * L2 * \dot{\theta}1^2 * \\
& \dot{\theta}2 * m2 * \cos(\theta1) * \cos(\theta2) - L1 * L2 * \dot{\theta}1^2 * \dot{\theta}2 * m3 * \cos(\theta1) * \cos(\theta2) - L1 * L2 * \\
& \dot{\theta}1^2 * \dot{\theta}2 * m4 * \cos(\theta1) * \cos(\theta2) - L1 * L3 * \dot{\theta}1^2 * \dot{\theta}3 * m3 * \cos(\theta1) * \cos(\theta3) - L1 * \\
& L3 * \dot{\theta}1^2 * \dot{\theta}3 * m4 * \cos(\theta1) * \cos(\theta3) - L1 * L4 * \dot{\theta}1^2 * \dot{\theta}4 * m4 * \cos(\theta1) * \cos(\theta4)
\end{aligned}$$

$$\frac{dL}{d\theta2} =$$

$$\begin{aligned}
& L2 * g * m2 * -\sin(\theta2) * \dot{\theta}2 + L2 * g * m3 * -\sin(\theta2) * \dot{\theta}2 + L2 * g * m4 * -\sin(\theta2) * \dot{\theta}2 + \\
& (L2^2 * \dot{\theta}2^2 * m2 * 2 * -\sin(\theta2) * \dot{\theta}2) * \frac{1}{2} + (L2^2 * \dot{\theta}2^2 * m3 * 2 * -\sin(\theta2) * \dot{\theta}2) * \frac{1}{2} + \\
& (L2^2 * \dot{\theta}2^2 * m4 * 2 * -\sin(\theta2) * \dot{\theta}2) * \frac{1}{2} + (L2^2 * \dot{\theta}2^2 * m2 * 2 * \cos(\theta2) * \dot{\theta}2) * \frac{1}{2} + \\
& (L2^2 * \dot{\theta}2^2 * m3 * 2 * \cos(\theta2) * \dot{\theta}2) * \frac{1}{2} + (L2^2 * \dot{\theta}2^2 * m4 * 2 * \cos(\theta2) * \dot{\theta}2) * \frac{1}{2} + L2^2 * \\
& \dot{\theta}2^2 * m2 * ((\cos(\theta2)^2) * \dot{\theta}2 - (\sin(\theta2)^2) * \dot{\theta}2) + L2^2 * \dot{\theta}2^2 * m3 * ((\cos(\theta2)^2) * \dot{\theta}2 - \\
& (\sin(\theta2)^2) * \dot{\theta}2) + L2^2 * \dot{\theta}2^2 * m4 * ((\cos(\theta2)^2) * \dot{\theta}2 - (\sin(\theta2)^2) * \dot{\theta}2) + L1 * L2 * \dot{\theta}1 * \\
& \dot{\theta}2 * m2 * \cos(\theta1) * -\sin(\theta2) * \dot{\theta}2 + L1 * L2 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}2 * m3 * \cos(\theta1) * -\sin(\theta2) * \dot{\theta}2 + \\
& L1 * L2 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}2 * m4 * \cos(\theta1) * -\sin(\theta2) * \dot{\theta}2 + L2 * L3 * \dot{\theta}2 * \dot{\theta}3 * m3 * -\sin(\theta2) * \dot{\theta}2 * \\
& \cos(\theta3) + L2 * L3 * \dot{\theta}2 * \dot{\theta}3 * m4 * -\sin(\theta2) * \dot{\theta}2 * \cos(\theta3) + L2 * L4 * \dot{\theta}2 * \dot{\theta}4 * m4 * \\
& -\sin(\theta2) * \dot{\theta}2 * \cos(\theta4) + L1 * L2 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}2 * m2 * \cos(\theta1) * \cos(\theta2) * \dot{\theta}2 + L1 * L2 * \dot{\theta}1 * \\
& \dot{\theta}2 * m2 * -\sin(\theta2) * \dot{\theta}2 * \sin(\theta1) + L1 * L2 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}2 * m3 * \cos(\theta1) * \cos(\theta2) * \dot{\theta}2 + L1 * \\
& L2 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}2 * m3 * -\sin(\theta2) * \dot{\theta}2 * \sin(\theta1) + L1 * L2 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}2 * m4 * \cos(\theta1) * \cos(\theta2) * \\
& \dot{\theta}2 + L1 * L2 * \dot{\theta}1 * \dot{\theta}2 * m4 * -\sin(\theta2) * \dot{\theta}2 * \sin(\theta1) + L2 * L3 * \dot{\theta}2 * \dot{\theta}3 * m3 * \\
& -\sin(\theta2) * \dot{\theta}2 * \sin(\theta3) + L2 * L3 * \dot{\theta}2 * \dot{\theta}3 * m3 * \cos(\theta3) * \cos(\theta2) * \dot{\theta}2 + L2 * L3 * \dot{\theta}2 *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dot{\theta}_3 * m_4 * -\sin(\theta_2) * \dot{\theta}_2 * \sin(\theta_3) + L_2 * L_3 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \cos(\theta_3) * \cos(\theta_2) * \dot{\theta}_2 + L_2 * \\ & L_4 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_4 * m_4 * -\sin(\theta_2) * \dot{\theta}_2 * \sin(\theta_4) + L_2 * L_4 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_4) * \cos(\theta_2) * \\ & \dot{\theta}_2 + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_2 * m_2 * \sin(\theta_1) * \cos(\theta_2) * \dot{\theta}_2 + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_2 * m_3 * \sin(\theta_1) * \\ & \cos(\theta_2) * \dot{\theta}_2 + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1 * d\theta_2 * m_4 * \sin(\theta_1) * \cos(\theta_2) * \dot{\theta}_2 + L_2 * L_3 * \dot{\theta}_2 * d\theta_3 * m_3 * \\ & \cos(\theta_2) * \dot{\theta}_2 * \sin(\theta_3) + L_2 * L_3 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \cos(\theta_2) * \dot{\theta}_2 * \sin(\theta_3) + L_2 * L_4 * \dot{\theta}_2 * \\ & \dot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_2) * \dot{\theta}_2 * \sin(\theta_4) \end{aligned}$$

$$\gg \frac{dL}{d\theta_2} =$$

$$\begin{aligned} & (I_2 * 2 * \dot{\theta}_2 * \ddot{\theta}_2) * \frac{1}{2} + (I_3 * 2 * \dot{\theta}_2 * \ddot{\theta}_2) * \frac{1}{2} + (I_4 * 2 * \dot{\theta}_2 * \ddot{\theta}_2) * \frac{1}{2} + I_2 * \dot{\theta}_1 * \ddot{\theta}_2 + I_3 * \\ & \dot{\theta}_1 * \ddot{\theta}_2 + I_4 * \dot{\theta}_1 * \ddot{\theta}_2 + I_3 * \ddot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 + I_4 * \ddot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 + I_4 * \ddot{\theta}_2 * \dot{\theta}_4 + (L_2^2 * 2 * \dot{\theta}_2 * \ddot{\theta}_2 * \\ & m_2 * \cos(\theta_2)^2) * \frac{1}{2} + (L_2^2 * 2 * \dot{\theta}_2 * \ddot{\theta}_2 * m_3 * \cos(\theta_2)^2) * \frac{1}{2} + (L_2^2 * 2 * \dot{\theta}_2 * \ddot{\theta}_2 * m_4 * \\ & \cos(\theta_2)^2) * \frac{1}{2} + (L_2^2 * 2 * \dot{\theta}_2 * \ddot{\theta}_2 * m_2 * \sin(\theta_2)^2) * \frac{1}{2} + (L_2^2 * 2 * \dot{\theta}_2 * \ddot{\theta}_2 * m_3 * \\ & \sin(\theta_2)^2) * \frac{1}{2} + (L_2^2 * 2 * \dot{\theta}_2 * \ddot{\theta}_2 * m_4 * \sin(\theta_2)^2) * \frac{1}{2} + L_2^2 * 2 * \dot{\theta}_2 * \ddot{\theta}_2 * m_2 * \cos(\theta_2) * \\ & \sin(\theta_2) + L_2^2 * 2 * \dot{\theta}_2 * \ddot{\theta}_2 * m_3 * \cos(\theta_2) * \sin(\theta_2) + L_2^2 * 2 * \dot{\theta}_2 * \ddot{\theta}_2 * m_4 * \cos(\theta_2) * \\ & \sin(\theta_2) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1 * \ddot{\theta}_2 * m_2 * \cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1 * \ddot{\theta}_2 * m_3 * \cos(\theta_1) * \\ & \cos(\theta_2) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1 * \ddot{\theta}_2 * m_4 * \cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) + L_2 * L_3 * \ddot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * m_3 * \cos(\theta_2) * \\ & \cos(\theta_3) + L_2 * L_3 * \ddot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \cos(\theta_2) * \cos(\theta_3) + L_2 * L_4 * \ddot{\theta}_2 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_2) * \\ & \cos(\theta_4) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1 * \ddot{\theta}_2 * m_2 * \cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1 * \ddot{\theta}_2 * m_2 * \cos(\theta_2) * \\ & \sin(\theta_1) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1 * \ddot{\theta}_2 * m_3 * \cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1 * \ddot{\theta}_2 * m_3 * \cos(\theta_2) * \\ & \sin(\theta_1) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1 * \ddot{\theta}_2 * m_4 * \cos(\theta_1) * \sin(\theta_2) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1 * \ddot{\theta}_2 * m_4 * \cos(\theta_2) * \\ & \sin(\theta_1) + L_2 * L_3 * \ddot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * m_3 * \cos(\theta_2) * \sin(\theta_3) + L_2 * L_3 * \ddot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * m_3 * \cos(\theta_3) * \\ & \sin(\theta_2) + L_2 * L_3 * \ddot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \cos(\theta_2) * \sin(\theta_3) + L_2 * L_3 * \ddot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \cos(\theta_3) * \\ & \sin(\theta_2) + L_2 * L_4 * Dd\theta_2 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_2) * \sin(\theta_4) + L_2 * L_4 * \ddot{\theta}_2 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_4) * \\ & \sin(\theta_2) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1 * \ddot{\theta}_2 * m_2 * \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1 * \ddot{\theta}_2 * m_3 * \sin(\theta_1) * \\ & \sin(\theta_2) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1 * \ddot{\theta}_2 * m_4 * \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2) + L_2 * L_3 * \ddot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * m_3 * \sin(\theta_2) * \\ & \sin(\theta_3) + L_2 * L_3 * \ddot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \sin(\theta_2) * \sin(\theta_3) + L_2 * L_4 * \ddot{\theta}_2 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \sin(\theta_2) * \\ & \sin(\theta_4) \end{aligned}$$

$$\gg T_2 = \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{\theta}_2} - \frac{dL}{d\theta_2} =$$

$$\begin{aligned} & T_2 = \\ & \ddot{\theta}_2 * (I_2 * \dot{\theta}_1 + I_2 * \dot{\theta}_2 + I_3 * \dot{\theta}_1 + I_3 * \dot{\theta}_2 + I_4 * \dot{\theta}_1 + I_3 * \dot{\theta}_3 + I_4 * \dot{\theta}_2 + I_4 * \dot{\theta}_3 + \\ & I_4 * \dot{\theta}_4 + L_2^2 * \dot{\theta}_2 * m_2 + L_2^2 * \dot{\theta}_2 * m_3 + L_2^2 * \dot{\theta}_2 * m_4 + L_2^2 * \dot{\theta}_2 * m_2 * \sin(2 * \\ & \theta_2) + L_2^2 * \dot{\theta}_2 * m_3 * \sin(2 * \theta_2) + L_2^2 * \dot{\theta}_2 * m_4 * \sin(2 * \theta_2) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1 * m_2 * \\ & \sin(\theta_1 + \theta_2) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1 * m_3 * \sin(\theta_1 + \theta_2) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1 * m_4 * \sin(\theta_1 + \theta_2) + \\ & L_2 * L_3 * \dot{\theta}_3 * m_3 * \sin(\theta_2 + \theta_3) + L_2 * L_3 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \sin(\theta_2 + \theta_3) + L_2 * L_4 * \dot{\theta}_4 * \\ & m_4 * \sin(\theta_2 + \theta_4) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1 * m_2 * \cos(\theta_1 - \theta_2) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1 * m_3 * \cos(\theta_1 - \\ & \theta_2) + L_1 * L_2 * \dot{\theta}_1 * m_4 * \cos(\theta_1 - \theta_2) + L_2 * L_3 * \dot{\theta}_3 * m_3 * \cos(\theta_2 - \theta_3) + L_2 * L_3 * \\ & \dot{\theta}_3 * m_4 * \cos(\theta_2 - \theta_3) + L_2 * L_4 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_2 - \theta_4)) - L_2 * \dot{\theta}_2 * (L_2 * \dot{\theta}_2^2 * \\ & m_2 * \cos(\theta_2) - g * m_3 * \sin(\theta_2) - g * m_4 * \sin(\theta_2) - g * m_2 * \sin(\theta_2) + L_2 * \dot{\theta}_2^2 * \\ & m_3 * \cos(\theta_2) + L_2 * \dot{\theta}_2^2 * m_4 * \cos(\theta_2) - L_2 * \dot{\theta}_2^2 * m_2 * \sin(\theta_2) - L_2 * \dot{\theta}_2^2 * m_3 * \\ & \sin(\theta_2) - L_2 * \dot{\theta}_2^2 * m_4 * \sin(\theta_2) + L_2 * \dot{\theta}_2^2 * m_2 * \cos(2 * \theta_2) + L_2 * \dot{\theta}_2^2 * m_3 * \\ & \cos(2 * \theta_2) + L_2 * \dot{\theta}_2^2 * m_4 * \cos(2 * \theta_2) + L_1 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_2 * m_2 * \cos(\theta_1 + \theta_2) + L_1 * \\ & \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_2 * m_3 * \cos(\theta_1 + \theta_2) + L_1 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_2 * m_4 * \cos(\theta_1 + \theta_2) + L_3 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * m_3 * \end{aligned}$$

$$\cos(\theta_2 + \theta_3) + L_3 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \cos(\theta_2 + \theta_3) + L_4 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_2 + \theta_4) + L_1 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_2 * m_2 * \sin(\theta_1 - \theta_2) + L_1 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_2 * m_3 * \sin(\theta_1 - \theta_2) + L_1 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_2 * m_4 * \sin(\theta_1 - \theta_2) - L_3 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * m_3 * \sin(\theta_2 - \theta_3) - L_3 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \sin(\theta_2 - \theta_3) - L_4 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \sin(\theta_2 - \theta_4))$$

$$\gg \frac{dL}{d\theta_3} =$$

$$L_3 * g * m_3 * -\sin(\theta_3) * \dot{\theta}_3 + L_3 * g * m_4 * -\sin(\theta_3) * \dot{\theta}_3 + (L_3^2 * \dot{\theta}_3^2 * m_3 * 2 * -\sin(\theta_3) * \dot{\theta}_3) * 1/2 + (L_3^2 * \dot{\theta}_3^2 * m_4 * 2 * -\sin(\theta_3) * \dot{\theta}_3) * 1/2 + (L_3^2 * \dot{\theta}_3^2 * m_3 * 2 * \cos(\theta_3) * \dot{\theta}_3) * 1/2 + (L_3^2 * \dot{\theta}_3^2 * m_4 * 2 * \cos(\theta_3) * \dot{\theta}_3) * 1/2 + L_3^2 * \dot{\theta}_3^2 * m_3 * ((\cos(\theta_3))^2 * \dot{\theta}_3 - (\sin(\theta_3))^2 * \dot{\theta}_3) + L_3^2 * \dot{\theta}_3^2 * m_4 * ((\cos(\theta_3))^2 * \dot{\theta}_3 - (\sin(\theta_3))^2 * \dot{\theta}_3) + L_1 * L_3 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_3 * m_3 * \cos(\theta_1) * -\sin(\theta_3) * \dot{\theta}_3 + L_1 * L_3 * \dot{\theta}_1 * d\theta_3 * m_4 * \cos(\theta_1) * -\sin(\theta_3) * \dot{\theta}_3 + L_2 * L_3 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * m_3 * \cos(\theta_2) * -\sin(\theta_3) * \dot{\theta}_3 + L_2 * L_3 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \cos(\theta_2) * -\sin(\theta_3) * \dot{\theta}_3 + L_3 * L_4 * \dot{\theta}_3 * \dot{\theta}_4 * m_4 * -\sin(\theta_3) * \dot{\theta}_3 * \cos(\theta_4) + L_1 * L_3 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_3 * m_3 * \cos(\theta_1) * \cos(\theta_3) * \dot{\theta}_3 + L_1 * L_3 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_3 * m_3 * -\sin(\theta_3) * \dot{\theta}_3 * \sin(\theta_1) + L_1 * L_3 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \cos(\theta_1) * \cos(\theta_3) * \dot{\theta}_3 + L_1 * L_3 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_3 * m_4 * -\sin(\theta_3) * \dot{\theta}_3 * \sin(\theta_1) + L_2 * L_3 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * m_3 * \cos(\theta_2) * \cos(\theta_3) * \dot{\theta}_3 + L_2 * L_3 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * m_3 * -\sin(\theta_3) * \dot{\theta}_3 * \sin(\theta_2) + L_2 * L_3 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \cos(\theta_2) * \cos(\theta_3) * \dot{\theta}_3 + L_2 * L_3 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * m_4 * -\sin(\theta_3) * \dot{\theta}_3 * \sin(\theta_2) + L_3 * L_4 * \dot{\theta}_3 * \dot{\theta}_4 * m_4 * -\sin(\theta_3) * \dot{\theta}_3 * \sin(\theta_4) + L_3 * L_4 * \dot{\theta}_3 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_4) * \cos(\theta_3) * \dot{\theta}_3 + L_1 * L_3 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_3 * m_3 * \sin(\theta_1) * \cos(\theta_3) * \dot{\theta}_3 + L_1 * L_3 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \sin(\theta_1) * \cos(\theta_3) * \dot{\theta}_3 + L_2 * L_3 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * m_3 * \sin(\theta_2) * \cos(\theta_3) * \dot{\theta}_3 + L_2 * L_3 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \sin(\theta_2) * \cos(\theta_3) * \dot{\theta}_3 + L_3 * L_4 * \dot{\theta}_3 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_3) * \dot{\theta}_3 * \sin(\theta_4)$$

$$\gg \frac{dL}{d\theta_3} =$$

$$(I_3 * 2 * \dot{\theta}_3 * \ddot{\theta}_3) * \frac{1}{2} + (I_4 * 2 * \dot{\theta}_3 * \ddot{\theta}_3) * \frac{1}{2} + I_3 * \dot{\theta}_1 * \ddot{\theta}_3 + I_3 * \dot{\theta}_2 * \ddot{\theta}_3 + I_4 * \dot{\theta}_1 * \ddot{\theta}_3 + I_4 * \dot{\theta}_2 * \ddot{\theta}_3 + I_4 * \ddot{\theta}_3 * \dot{\theta}_4 + (L_3^2 * 2 * \dot{\theta}_3 * \ddot{\theta}_3 * m_3 * \cos(\theta_3)^2) * \frac{1}{2} + (L_3^2 * 2 * \dot{\theta}_3 * \ddot{\theta}_3 * m_4 * \cos(\theta_3)^2) * \frac{1}{2} + (L_3^2 * 2 * \dot{\theta}_3 * \ddot{\theta}_3 * m_3 * \sin(\theta_3)^2) * \frac{1}{2} + (L_3^2 * 2 * \dot{\theta}_3 * \ddot{\theta}_3 * m_4 * \sin(\theta_3)^2) * \frac{1}{2} + L_3^2 * 2 * \dot{\theta}_3 * \ddot{\theta}_3 * m_3 * \cos(\theta_3) * \sin(\theta_3) + L_3^2 * 2 * \dot{\theta}_3 * \ddot{\theta}_3 * m_4 * \cos(\theta_3) * \sin(\theta_3) + L_1 * L_3 * \dot{\theta}_1 * \ddot{\theta}_3 * m_3 * \cos(\theta_1) * \cos(\theta_3) + L_1 * L_3 * \dot{\theta}_1 * \ddot{\theta}_3 * m_4 * \cos(\theta_1) * \cos(\theta_3) + L_2 * L_3 * \dot{\theta}_2 * \ddot{\theta}_3 * m_3 * \cos(\theta_2) * \cos(\theta_3) + L_2 * L_3 * \dot{\theta}_2 * \ddot{\theta}_3 * m_4 * \cos(\theta_2) * \cos(\theta_3) + L_3 * L_4 * \ddot{\theta}_3 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_3) * \cos(\theta_4)$$

$$\gg T_3 = \frac{dL}{dt d\dot{\theta}_3} - \frac{dL}{d\theta_3}$$

$$T_3 =$$

$$\ddot{\theta}_3 * (I_3 * \dot{\theta}_1 + I_3 * \dot{\theta}_2 + I_4 * \dot{\theta}_1 + I_3 * \dot{\theta}_3 + I_4 * \dot{\theta}_2 + I_4 * \dot{\theta}_3 + I_4 * \dot{\theta}_4 + L_3^2 * \dot{\theta}_3 * m_3 + L_3^2 * \dot{\theta}_3 * m_4 + L_3^2 * \dot{\theta}_3 * m_3 * \sin(2 * \theta_3) + L_3^2 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \sin(2 * \theta_3) + L_1 * L_3 * \dot{\theta}_1 * m_3 * \cos(\theta_1) * \cos(\theta_3) + L_1 * L_3 * \dot{\theta}_1 * m_4 * \cos(\theta_1) * \cos(\theta_3) + L_2 * L_3 * \dot{\theta}_2 * m_3 * \cos(\theta_2) * \cos(\theta_3) + L_2 * L_3 * \dot{\theta}_2 * m_4 * \cos(\theta_2) * \cos(\theta_3) + L_3 * L_4 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_3) * \cos(\theta_4)) - L_3 * \dot{\theta}_3 * (L_3 * \dot{\theta}_3^2 * m_3 * \cos(\theta_3) - g * m_4 * \sin(\theta_3) - g * m_3 * \sin(\theta_3) + L_3 * \dot{\theta}_3^2 * m_4 * \cos(\theta_3) - L_3 * \dot{\theta}_3^2 * m_3 * \sin(\theta_3) - L_3 * \dot{\theta}_3^2 * m_4 * \sin(\theta_3) + L_3 * \dot{\theta}_3^2 * m_3 * \cos(2 * \theta_3) + L_3 * \dot{\theta}_3^2 * m_4 * \cos(2 * \theta_3) + L_1 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_3 * m_3 * \cos(\theta_1 + \theta_3) + L_1 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \cos(\theta_1 + \theta_3) + L_2 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * m_3 * \cos(\theta_2 + \theta_3) + L_2 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \cos(\theta_2 + \theta_3) + L_4 * \dot{\theta}_3 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_3 + \theta_4) + L_1 * \dot{\theta}_1 *$$

$$\dot{\theta}_3 * m_3 * \sin(\theta_1 - \theta_3) + L_1 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \sin(\theta_1 - \theta_3) + L_2 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * m_3 * \sin(\theta_2 - \theta_3) + L_2 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \sin(\theta_2 - \theta_3) - L_4 * \dot{\theta}_3 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \sin(\theta_3 - \theta_4))$$

$$\gg \frac{dL}{d\theta_4} =$$

$$L_4 * g * m_4 * -\sin(\theta_4) * \dot{\theta}_4 + (L_4^2 * \dot{\theta}_4^2 * m_4 * 2 * -\sin(\theta_4) * \dot{\theta}_4) * \frac{1}{2} + (L_4^2 * \dot{\theta}_4^2 * m_4 * 2 * \cos(\theta_4) * \dot{\theta}_2) * \frac{1}{2} + L_4^2 * \dot{\theta}_4^2 * m_4 * ((\cos(\theta_4))^2 * \dot{\theta}_4 - (\sin(\theta_4))^2 * \dot{\theta}_4) + L_1 * L_4 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_1) * -\sin(\theta_4) * \dot{\theta}_4 + L_2 * L_4 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_2) * -\sin(\theta_4) * \dot{\theta}_4 + L_3 * L_4 * \dot{\theta}_3 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_3) * -\sin(\theta_4) * \dot{\theta}_4 + L_1 * L_4 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_1) * \cos(\theta_4) * \dot{\theta}_4 + L_1 * L_4 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_4 * m_4 * -\sin(\theta_4) * \dot{\theta}_4 * \sin(\theta_1) + L_2 * L_4 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_2) * \cos(\theta_4) * \dot{\theta}_4 + L_2 * L_4 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_4 * m_4 * -\sin(\theta_4) * \dot{\theta}_4 * \sin(\theta_2) + L_3 * L_4 * \dot{\theta}_3 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_3) * \cos(\theta_4) * \dot{\theta}_4 + L_3 * L_4 * \dot{\theta}_3 * \dot{\theta}_4 * m_4 * -\sin(\theta_4) * \dot{\theta}_4 * \sin(\theta_3) + L_1 * L_4 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \sin(\theta_1) * \cos(\theta_4) * \dot{\theta}_4 + L_2 * L_4 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \sin(\theta_2) * \cos(\theta_4) * \dot{\theta}_4 + L_3 * L_4 * \dot{\theta}_3 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \sin(\theta_3) * \cos(\theta_4) * \dot{\theta}_4$$

$$\gg \frac{dL}{d\theta_4} =$$

$$(I_4 * 2 * \dot{\theta}_4 * \ddot{\theta}_4) * \frac{1}{2} + I_4 * \dot{\theta}_1 * \ddot{\theta}_4 + I_4 * \dot{\theta}_2 * \ddot{\theta}_4 + I_4 * \dot{\theta}_3 * \ddot{\theta}_4 + (L_4^2 * 2 * \dot{\theta}_4 * \ddot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_4)^2) * \frac{1}{2} + (L_4^2 * 2 * \dot{\theta}_4 * \ddot{\theta}_4 * m_4 * \sin(\theta_4)^2) * \frac{1}{2} + L_4^2 * 2 * \dot{\theta}_4 * \ddot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_4) * \sin(\theta_4) + L_1 * L_4 * \dot{\theta}_1 * \ddot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_1) * \cos(\theta_4) + L_2 * L_4 * \dot{\theta}_2 * \ddot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_2) * \cos(\theta_4) + L_3 * L_4 * \dot{\theta}_3 * \ddot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_3) * \cos(\theta_4) + L_1 * L_4 * \dot{\theta}_1 * \ddot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_1) * \sin(\theta_4) + L_1 * L_4 * \dot{\theta}_1 * \ddot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_4) * \sin(\theta_1) + L_2 * L_4 * \dot{\theta}_2 * \ddot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_2) * \sin(\theta_4) + L_2 * L_4 * \dot{\theta}_2 * \ddot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_4) * \sin(\theta_2) + L_3 * L_4 * \dot{\theta}_3 * \ddot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_3) * \sin(\theta_4) + L_3 * L_4 * \dot{\theta}_3 * \ddot{\theta}_4 * m_4 * \cos(\theta_4) * \sin(\theta_3) + L_1 * L_4 * \dot{\theta}_1 * \ddot{\theta}_4 * m_4 * \sin(\theta_1) * \sin(\theta_4) + L_2 * L_4 * \dot{\theta}_2 * \ddot{\theta}_4 * m_4 * \sin(\theta_2) * \sin(\theta_4) + L_3 * L_4 * \dot{\theta}_3 * \ddot{\theta}_4 * m_4 * \sin(\theta_3) * \sin(\theta_4)$$

$$\gg T_4 = \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{\theta}_4} - \frac{dL}{d\theta_4}$$

$$T_4 =$$

$$\ddot{\theta}_4 * (I_4 * \dot{\theta}_1 + I_4 * \dot{\theta}_2 + I_4 * \dot{\theta}_3 + I_4 * \dot{\theta}_4 + L_4^2 * \dot{\theta}_4 * m_4 + L_4^2 * \dot{\theta}_4 * m_4 * \sin(2 * \theta_4) + L_1 * L_4 * \dot{\theta}_1 * m_4 * \sin(\theta_1 + \theta_4) + L_2 * L_4 * \dot{\theta}_2 * m_4 * \sin(\theta_2 + \theta_4) + L_3 * L_4 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \sin(\theta_3 + \theta_4) + L_1 * L_4 * \dot{\theta}_1 * m_4 * \cos(\theta_1 - \theta_4) + L_2 * L_4 * \dot{\theta}_2 * m_4 * \cos(\theta_2 - \theta_4) + L_3 * L_4 * \dot{\theta}_3 * m_4 * \cos(\theta_3 - \theta_4)) - L_4 * \dot{\theta}_4 * m_4 * (L_4 * d\theta_4^2 * \cos(2 * \theta_4) - L_4 * \dot{\theta}_4^2 * \sin(\theta_4) - g * \sin(\theta_4) + L_4 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_4 * \cos(\theta_4) + L_1 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_4 * \sin(\theta_1 - \theta_4) + L_2 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_4 * \sin(\theta_2 - \theta_4) + L_3 * \dot{\theta}_3 * \dot{\theta}_4 * \sin(\theta_3 - \theta_4) + L_1 * \dot{\theta}_1 * \dot{\theta}_4 * \cos(\theta_1 + \theta_4) + L_2 * \dot{\theta}_2 * \dot{\theta}_4 * \cos(\theta_2 + \theta_4) + L_3 * \dot{\theta}_3 * \dot{\theta}_4 * \cos(\theta_3 + \theta_4))$$